平成１５年度 大学院入試

# 数　学　問　題　A

実施日時：平成１４年８月２８日（水）
9:00 〜 12:00

- 監督者の合図があるまで開いてはならない．
- 問題用紙は表紙も入れて５枚である．
- 問題は全部で４問である．
- 解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い，それぞれの答案用紙に
  受験番号，氏名，問題番号 を記入すること．
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[ **1** ] $X$ は有限次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ のコンパクト部分集合であるとする. 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が, 任意の点 $x \in X$ と $x$ に収束する $X$ 内の任意の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$f(x) \leqq \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ f(x_k) \;\middle|\; k \geqq n \right\}$$

をみたすと仮定する. 以下のことを示せ.

**(1)** 集合 $\{f(x) \mid x \in X\}$ は下に有界である.

**(2)** 関数 $f$ は最小値をもつ.

**[ 2 ]** $C^1$ 級関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $g(0) = 1$ をみたすと仮定し, 自然数 $m \geqq 1$ に対して $f(x) = x^m g(x)$ とおく. 以下のことを示せ.

**(1)** 原点を含む適当な開区間 $I$ 上で定義された $C^1$ 級関数 $h$ で

$$h(x)^m = g(x), \quad h(x) > 0 \qquad (x \in I)$$

をみたすものが存在する.

**(2)** 原点を含む適当な開区間 $J$ 上で定義された $C^1$ 級関数 $\varphi$ で

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1, \quad f(\varphi(y)) = y^m \ \ (y \in J)$$

をみたすものが存在する.

**[ 3 ]** $M_3(\mathbb{R})$ を 3 次実正方行列全体よりなる実ベクトル空間とし,

$$S = \left\{ X \in M_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; {}^tX = X \right\}$$

とおく．ただし ${}^tX$ は $X$ の転置行列を表す．任意の $A \in S$ に対して, 写像 $T_A : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ を

$$T_A(X) = {}^tXA + AX \qquad (X \in M_3(\mathbb{R}))$$

で定める．以下の問に答えよ.

**(1)** $T_A$ は線形写像であることを示せ.

**(2)** $A$ が正則行列であるとき, $T_A$ の像 $\mathrm{Im}\, T_A$ は $S$ に一致することを示せ.

**(3)** $a_1, a_2, a_3$ は零でない実数であるとし,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

の場合を考える．このとき, $T_A$ の核 $\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底を一組求めよ.

**[ 4 ]** $A$ は $n$ 次エルミート行列であるとし, $A$ の相異なる固有値の全体を $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ と書く. 各 $\alpha_j$ $(1 \leqq j \leqq k)$ に対応する $A$ の固有空間を $V_j$ と書く. 以下のことを示せ.

**(1)** $n$ 次複素正方行列 $B$ に対して, $AB = BA$ となるための必要十分条件は $BV_j \subset V_j$ $(1 \leqq j \leqq k)$ である.

**(2)** $m$ は正の奇数であるとする. $n$ 次複素正方行列 $C$ が $A^m C = C A^m$ をみたすならば, $AC = CA$ となる.