平成 17 年度 大学院入試

数　学　問　題　B

実施日時：平成 16 年 8 月 30 日 (月)
13 : 30 〜 16 : 30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて 4 枚，問題は全部で 3 問である.
- 3 問の中からちょうど 2 問を選択解答すること．下の欄に，受験番号，氏名を記入し，選択解答した問題の番号を ◯ で囲め.

受験番号	氏名

選択問題番号			
	1	**2**	**3**

- 解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い，それぞれ の答案用紙に 受験番号，氏名，問題番号 を記入すること.
- 問題冊子の表紙，答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[1] R は可換環で乗法の単位元をもつものとする．R の任意のイデアルの減少列 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ に対して $I_n = I_{n+1} = \cdots$ となる n が存在するとき，R を Artin 環という．R が Artin 環であるとき，以下の命題が成り立つことを証明せよ．

(1) $f\colon R \to S$ が全射環準同型ならば，S も Artin 環である．

(2) R が整域ならば，R は体である．

(3) R の素イデアルは極大イデアルである．

(4) R の異なる素イデアルの個数は有限である．

[2] 複素平面 $\mathbb{C}$ を 2 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^2$ とみなす．$\mathbb{C}^2$ の部分空間

$$T = \{\, (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{C}^2 \mid |\alpha_0| = |\alpha_1| = 1 \,\}$$

に対し，写像 $\varphi\colon T \times [0,1] \to \mathbb{C}^2$ を

$$\varphi(\alpha_0, \alpha_1, t) = (\sqrt{1-t}\,\alpha_0, \sqrt{t}\,\alpha_1)$$

によって定義する．また，

$$\begin{aligned} S &= \{\, (\beta_0, \beta_1) \in \mathbb{C}^2 \mid |\beta_0|^2 + |\beta_1|^2 = 1 \,\}, \\ C &= \{\, \alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| = 1 \,\}, \\ D &= \{\, \beta \in \mathbb{C} \mid |\beta| < 1 \,\} \end{aligned}$$

とおく．このとき，次の各命題を示せ．

(1) φ は S の上への連続な写像である．

(2) $\varphi(T \times [0,1))$ は $C \times D$ に同相である．

(3) $S - \{\, (\beta_0, \beta_1) \in S \mid \beta_0 = 0 \,\}$ の基本群は $\mathbb{Z}$ に同型である．

[3] μ を $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ 上の Lebesgue 測度とし，$\mathcal{X}$ を $\mathbb{R}_+$ 上定義された μ-可測関数全体とする．ただし μ に関しほとんど至るところ等しい関数は同一視する．$\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_k$ $(k = 1, 2, \dots)$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \left\{ f \in \mathcal{X};\ \int_0^{\infty} |f(x)|^2 d\mu(x) < +\infty \right\},\\ \mathcal{H}_k &= \left\{ f \in \mathcal{X};\ \|f\|_k = \left(\int_0^{k} |f(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} < +\infty \right\}\end{aligned}$$

によって定義し，さらに $\mathcal{L} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k$ とおく．

(1) $\mathcal{H} \subsetneqq \mathcal{L}$ を示せ．

(2) $\|f\| = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\min(\|f\|_k, 1)}{2^k}$, $d(f, g) = \|f - g\|$ $(f, g \in \mathcal{L})$ とおく．d が $\mathcal{L}$ 上の距離であることを示せ．

（$d_k(f, g) = \|f - g\|_k$ によって定義される d_k が，$[0, k]$ で定義され μ に関し 2 乗可積分な関数全体 $L^2([0, k], \mu)$ の上の距離であることは用いてよい．）

(3) $\mathcal{L}$ が d に関し完備であることを示せ．

（$L^2([0, k], \mu)$ が d_k に関し完備であることは用いてよい．）