平成18年度 大学院入試

数　学　問　題　B

実施日時

平成17年8月29日（月）

13:30 〜 16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて4枚，問題は全部で3問である.
- 3問の中からちょうど2問を選択解答すること．下の欄に，受験番号，氏名を記入し，選択解答した問題の番号を ◯ で囲め.

受験番号	氏名

選択問題番号			
	1	**2**	**3**

- 解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い，それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号 を記入すること.
- 問題冊子の表紙，答案用紙，下書き用紙は，終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

問題 1

$\mathbf{Z}[x]$ を整数環 $\mathbf{Z}$ 上の 1 変数多項式環とする．I を $\mathbf{Z}[x]$ の素イデアルとするとき，以下の問いに答えよ．ただし, $\mathbf{Q}$ は有理数体とする.

(1) $I \cap \mathbf{Z} = (0)$ のとき,

$$I\mathbf{Q}[x] \cap \mathbf{Z}[x] = I$$

であることを示せ．ただし, $I\mathbf{Q}[x]$ は I により生成される $\mathbf{Q}[x]$ のイデアルを表す.

(2) $I \cap \mathbf{Z} = (0)$ のとき，I は単項イデアルであることを示せ.

(3) $I \cap \mathbf{Z} \neq (0)$ のとき，I の形を決定せよ.

問題 2

トーラスと球面

$$\begin{aligned} M &= \{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3\ ;\ (\sqrt{x^2+y^2}-b)^2+z^2=a^2\} \\ S^2 &= \{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3\ ;\ x^2+y^2+z^2=1\} \end{aligned}$$

を考える． ただし, a,b は $0<a<b$ をみたす定数である. 以下の問いに答えよ.

(1) M を図示せよ.

(2) 写像 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3,\ (u,v)\to(x,y,z)$, を

$$(x,y,z)=(r\cos u, r\sin u, a\sin v),\quad r=a\cos v+b$$

で定義する． 各点 $p=(u,v)$ における f の微分 (ヤコビ行列) $(df)_p$ を求めよ. さらに, $f(\mathbf{R}^2)=M$ であることを確かめよ.

(3) M の各点 p に対し, その点での単位外向き法線ベクトル $g(p)$ を対応させることにより, ガウス写像 $g:M\to S^2$ が定まる. 接平面

$$T_pM,\ T_{g(p)}S^2\subset\mathbf{R}^3\quad(p\in M)$$

を, 平行移動により $\mathbf{R}^3$ の線形部分空間と同一視するとき, $T_pM=T_{g(p)}S^2$ であることを示せ.

(4) (3) により T_pM と $T_{g(p)}S^2$ を同一のベクトル空間とみなすとき, M の各点 p における g の微分 $(dg)_p:T_pM\to T_{g(p)}S^2$ の行列式を求めよ.

問題 3

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を $\mu(X) < \infty$ なる測度空間とし，ほとんど至るところ $|f(x)| < \infty$ をみたす X 上の $\mathcal{F}$-可測な実数値関数 f 全体の集合を S とする．$f \in S$ に対し

$$||f||_S = \int_X \frac{|f(x)|}{1 + |f(x)|}\, d\mu(x)$$

とおく．以下を証明せよ．

(1) $f \in S$ および $\alpha > 0$ に対し $E_\alpha = \{x \in X\,;\, |f(x)| > \alpha\}$ とするとき，

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}\,\mu(E_\alpha) \le ||f||_S \ \le \mu(E_\alpha) + \frac{\alpha}{1+\alpha}\,\mu(X).$$

(2) S の関数列 $\{f_n\}$ および $f \in S$ に対し，$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_S = 0$ となるための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\ \mu(\{x \in X\,;\, |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

となることである．

(3) S の関数列 $\{f_n\}$ および $f \in S$ に対し，$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_S = 0$ であるならば，実数 β と $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$ をみたす実数列 $\{\beta_n\}$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty}\ ||\beta_n f_n - \beta f||_S = 0.$$