数学専攻入学試験 (2/16, 2007)

[1] 定数 a, b の値を

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\left(\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}\right) = 0$$

が成り立つように定めよ.

[2] $f(x,y)$ は $\mathbf{R}^2$ 上の実数値 C^1 級関数, $g(x)$ は $\mathbf{R}$ 上の実数値 C^1 級関数であるとする. このとき, 関数

$$F(x) = \int_0^{g(x)} f(x,y)\,dy \qquad (x \in \mathbf{R})$$

は C^1 級であることを示し, その導関数 $F'(x)$ を求めよ.

[3] V は n 次元実ベクトル空間, $f : V \longrightarrow V$ は線形写像であるとする. 自然数 k に対して, f を k 回合成して得られる線形写像を f^k で表す.
(1) 任意の自然数 k に対して

$$\mathrm{Im} f^{k+1} \subset \mathrm{Im} f^k$$

となることを示せ. ただし $\mathrm{Im} f^k$ は f^k の像を表す.
(2) ある自然数 k に対して $\dim \mathrm{Im} f^k = 1$ であるならば, 実数 c で $f^{k+1} = cf^k$ となるものが存在することを示せ.

[4] $\mathbf{Z}$ を整数全体の集合とする. 複素平面 $\mathbf{C}$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$z \sim z' \iff z - z' \in \mathbf{Z}$$

で定め, 商集合 $Y = \mathbf{C}/\sim$ と射影 $p : \mathbf{C} \longrightarrow Y$ を考える. Y に商位相を導入し, 位相空間とみなす.
(1) $\mathbf{C}$ 上の写像

$$f(z) = c(z+i) \qquad (\text{ただし}\ \ c \in \mathbf{C},\ \ i = \sqrt{-1})$$

に対して, 写像 $g : Y \longrightarrow Y$ で $p \circ f = g \circ p$ となるものが存在するための, 係数 c に関する条件を求めよ.
(2) 小問 (1) において写像 g が存在するとき, g は連続であることを示せ.

[5] 複素積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=6}\frac{1}{(z-5)^4\,e^z}\,dz$$

の値を求めよ. ここで積分路は反時計回りに 1 周するものとする.