2008 年度（平成 20 年度）大学院入試

数　学　問　題　A

実施日時：2007 年（平成 19 年）8 月 29 日（水）
9 : 00 〜 12 : 00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない．
- 問題冊子は表紙も入れて 5 枚である．
- 問題は全部で 4 問である．
- 解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い，それぞれ の答案用紙に受験番号，氏名，問題番号 を記入すること．
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[1] $\mathbb{R}^2$ 上の実数値連続関数 $f(x,y)$ に対し，$\mathbb{R}$ 上の関数 $F = F(\theta)$ を

$$F(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta), \qquad \theta \in \mathbb{R},$$

で定める．次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ が C^1 級であったとする．この場合に $\dfrac{dF}{d\theta}(\dfrac{\pi}{3})$ の値を $a = f_x(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ および $b = f_y(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ を用いて表せ．

(2) $f(x,y)$ が必ずしも C^1 級だとは限らない場合にも，F は $\mathbb{R}$ 上で，有界かつ一様連続であることを示せ．

[2] m, n, p を正整数とし，以下では行列はすべて複素数を成分とする．A を $m \times n$ 行列，B を $n \times m$ 行列とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) A の階数（rank）が m ならば，$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に関する連立１次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

は，各 $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m$ に対して解をもつことを示せ.

(2)　B の定める線形写像を $\varphi_B : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ で表し，転置行列 ${}^tB$ の定める線形写像を $\varphi_{{}^tB} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ で表す．　もし φ_B が単射なら，$\varphi_{{}^tB}$ が全射になることを示せ.

(3)　線形写像 φ_B が単射であったとする．このとき任意の $p \times m$ 行列 P に対して，$P = QB$ をみたす $p \times n$ 行列 Q が存在することを示せ.

[**3**] X をコンパクト Hausdorff 空間とし，X の開集合全体のなす集合族 $\mathcal{O}$ を考える． 直積集合 $X \times \{0, 1\}$ に

$$\mathcal{B} = \{ U \times \{0\} \mid U \in \mathcal{O}\} \cup \{ V \times \{0, 1\} \mid V \in \mathcal{O}\}$$

を開基（open base）とするような位相を定めることにより得られる位相空間を Y と書く．ただし $\{0, 1\}$ は，2 つの元 0, 1 から成る集合である．このとき，以下を示せ.

(1)　位相空間 Y は Hausdorff 空間ではない.

(2)　$X \times \{0\}$ はコンパクトではあるが，Y の閉集合ではない.

[**4**] p を非負整数として，複素平面上の有理関数

$$\varphi(z) = \frac{z^p}{1 - z^3}$$

を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) この関数 $\varphi(z)$ の，原点 $z = 0$ におけるテイラー展開（ベキ級数展開）を求めよ．また，その収束半径を求めよ．

(2) 原点を中心とし，半径 R の円周を反時計回りに 1 周する積分路 C に対して，$0 < R < 1$ のときと $R > 1$ のときのそれぞれの場合に，次の複素線積分を計算せよ．

$$\int_C \varphi(z)\, dz$$