2008 年度（平成 20 年度） 大学院入試

数 学 問 題 B

実施日時：2007 年（平成 19 年）8 月 29 日（水）
13 : 30 〜 16 : 30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない．
- 問題冊子は表紙も入れて 4 枚，問題は全部で 3 問である．
- 3 問の中からちょうど 2 問を選択解答すること．下の欄に，受験番号，氏名を記入し，選択解答した問題の番号を ◯ で囲め．

受験番号	氏名

選択問題番号			
	1	**2**	**3**

- 解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い，それぞれ の答案用紙に 受験番号，氏名，問題番号 を記入すること．
- 問題冊子の表紙，答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[**1**] 整数全体から成る集合 $\mathbb{Z}$ に対し，

$$R = \{x + y\sqrt{-1} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

とおく．一方，各複素数 z に対して，$|z|$ により，その絶対値 $\sqrt{z\bar{z}}$ を示すことにする．

(1) 複素数 a, b, q, r （ただし $b \neq 0$）に対して，

$$\frac{a}{b} = \mu + \nu\sqrt{-1}, \qquad q = m + n\sqrt{-1}$$

の形に実部と虚部に分けて書いたとき（ただし μ, ν, m, $n \in \mathbb{R}$），$r = a - bq$ とおくと，絶対値 $|r|$, $|b|$ は，等式

$$|r|^2 = \{(\mu - m)^2 + (\nu - n)^2\}\,|b|^2$$

をみたすことを示せ.

(2) 任意の $a, b \in R$（ただし $b \neq 0$）に対して，$\frac{a}{b}$ に（複素平面上での）距離が最も近い R の元（の一つ）を q とし，$r = a - bq$ とおけば，不等式

$$|r| < |b|$$

が成り立つことを示せ.

(3) R が単項イデアル整域であることを導け.

(4) R の単元（可逆元）全体は，$1, -1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$ であることを示せ.

(5) $R/(2 + \sqrt{-1})R$ が体となることを示せ.

[**2**] 2次元球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 上の同値関係 $\sim$ を次で定める．

$$p \sim p' \quad \Longleftrightarrow \quad p' = p \text{ または } p' = -p$$

ただし，$p = (x, y, z)$, $p' = (x', y', z') \in S^2$ とする．この同値関係による S^2 の商集合 $P^2(\mathbb{R}) = S^2/\sim$ に，自然な射影 $\pi : S^2 \to P^2(\mathbb{R})$ で定まる商位相と多様体の構造を与える．また S^2 の各点 p に対し，対応する同値類を $[p] \in P^2(\mathbb{R})$ で表す．

(1) S^2 の各点 $p = (x, y, z)$ に対し，$f([p]) = x^2 + y^2 - z^2$ とおく．このとき関数 $f : P^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ が矛盾なく定義され，しかも連続関数となることを示せ．

(2) $A = f^{-1}(0)$ とおくと，A は $P^2(\mathbb{R})$ の連結な1次元部分多様体となることを示せ．

(3) S^2 の1点 $q = (0, 0, 1)$ を考える．A のすべての点を1点 $[q] \in P^2(\mathbb{R})$ に写す定値写像を $c : A \to P^2(\mathbb{R})$ で表す．このとき包含写像 $i : A \hookrightarrow P^2(\mathbb{R})$ は，$c : A \to P^2(\mathbb{R})$ にホモトピックであることを示せ．

[**3**] $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上定義されたルベーグ可測な実数値関数とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $p > 1$ とする．f が p 乗可積分であるとき，

$$\frac{f(x)}{1+|x|}$$

は $\mathbb{R}$ 上可積分であることを示せ.

(2) 上の (1) において各自然数 n に対し，

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{1+|x|} \sin^n x \, dx$$

とおく．このとき，$\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ.