2009 年度（平成 21 年度）大学院入試

数 学 問 題 A

実施日時

2008 年（平成 20 年）8 月 27 日（水）

9:00〜12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない．
- 問題冊子は表紙も入れて５枚である．
- 問題は全部で４問である．
- 解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い，それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること．
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[1] (1) $f(x)$ は区間 $[0,1)$ で C^1 級の関数で

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) < 0$$

を満たすものとする．このとき，十分大きな任意の自然数 n に対して

$$nf\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{f'(0)}{2}$$

が成り立つことを示せ．ただし $f'(0)$ は $x = 0$ における右微分係数を表す.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ は発散することを示せ.

[2] $\mathbb{R}^4$ を 4 次元実ベクトル空間として，その標準基底を

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおき，$\mathbb{R}^4$ の内積を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 \qquad \left(\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4\right)$$

で定める．また $\mathbf{0}$ ではないベクトル $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^4$ に対し，写像 $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2\frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}\boldsymbol{u} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$$

で定義する．

(1) σ は線形写像であることを示せ．

(2) σ は固有値 -1 を持つことを示し，その固有空間を求めよ．

(3) 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ が σ と可換，すなわち $\sigma \circ f = f \circ \sigma$ であるならば，$\boldsymbol{u}$ は f の固有ベクトルであることを示せ．

(4) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4$ とするとき，線形写像 σ の標準基底に関する行列表示を求めよ．

[3] (1) ハウスドルフ位相空間のコンパクト部分集合は閉集合であることを示せ．

(2) １次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $X = [0,1]$，$Y = [0,1)$ に対し，集合

$$F = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1\}$$

は直積位相空間 $X \times Y$ の閉集合であることを示せ．また F が $X \times Y$ のコンパクト部分集合であるかどうかを判定し，その理由を述べよ．

[4] (1) $e^z + e^{-z} = 0$ を満たす複素数 z をすべて求めよ.

(2) 実数 $R > 0$ に対して

$$\Gamma_R = \{R + is \,|\, 0 \leq s \leq \pi\} \cup \{-R + is \,|\, 0 \leq s \leq \pi\}$$

とおく．このとき

$$\sup_{z \in \Gamma_R} \left| \frac{e^{-iz}}{e^z + e^{-z}} \right| \leq \frac{e^{\pi}}{e^R - e^{-R}}$$

を示せ．ただし $i = \sqrt{-1}$ である.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}\, dx$ の値を求めよ.