2009 年度（平成 21 年度）大学院入試

数学問題 B

実施日時

2008 年（平成 20 年）8 月 27 日（水）

13:30〜16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて４枚，問題は全部で３問である.
- ３問の中からちょうど２問を選択解答すること．下の欄に，受験番号，氏名を記入し，選択解答した問題の番号を○で囲め.

受験番号	氏名

選択問題番号		
1	2	3

- 解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い，それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること.
- 問題冊子の表紙，答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[1] 整数全体からなる環を $\mathbb{Z}$ とし，7 で生成された $\mathbb{Z}$ の単項イデアルを $7\mathbb{Z}$ と書き，有理数体 $\mathbb{Q}$ の部分環 R を次で定める．

$$R = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ b \notin 7\mathbb{Z} \right\}.$$

また，I を 7 で生成された R の単項イデアルとして，R から剰余環 R/I への自然な環準同型写像を $\varphi : R \to R/I$ とおく．

(1) $\mathbb{Z}$ の φ による像を $\varphi(\mathbb{Z})$ とするとき，$\varphi(\mathbb{Z}) = R/I$ となることを示せ．ただし，「2つの整数 m, n が互いに素ならば，$mc + nd = 1$ となる整数 c, d が存在する」という事実は既知としてよい．

(2) 次の等式を満たす正の整数 k で最小のものを求めよ．

$$\varphi(k) = \varphi\left(\frac{5}{3}\right) + \varphi\left(\frac{1}{4}\right)$$

(3) I は R の唯一つの極大イデアルであることを示せ．

[2] 実２次正方行列全体の集合

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

を４次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ と同一視する．

(1) $M_2(\mathbb{R})$ の部分集合 $N = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{ X \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det X = 1 \}$ は，$\mathbb{R}^4$ の滑らかな部分多様体になることを示せ．

(2) 行列 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ に対し，N の部分集合 $N^J = \{ X \in N \mid JXJ^{-1} = X \}$ に N の相対位相を与える．N^J の１次元ホモロジー群 $H_1(N^J\,;\mathbb{Z})$ を求めよ．

(3) 行列 $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対し，写像 $f : N \to N$ を

$$f(X) = WXW^{-1} \qquad (X \in N)$$

で定める．このとき $f(N^J) \subset N^J$ となることを示し，f の誘導する写像

$$f_* : H_1(N^J\,;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(N^J\,;\mathbb{Z})$$

を求めよ．

[3] $\mathbb{R}$ 上の連続関数全体を F とする．$f \in F$ に対して

$$p_j(f) = \max_{-j \le x \le j} |f(x)| \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

とおく．また，F 上の距離 $d : F \times F \to [0, \infty)$ を

$$d(f, g) = \sup_j \left(\frac{1}{j} \, \frac{p_j(f-g)}{1 + p_j(f-g)} \right) \qquad (f, g \in F)$$

によって定義する．ただし sup において j は自然数全体を動くとする．

(1) 距離空間 F の点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，ある $f \in F$ に収束するための必要十分条件は，任意の $j = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} p_j(f_n - f) = 0$$

が成り立つことである．このことを示せ．

(2) φ を有界な台を持つ $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可積分関数とする．各 $f \in F$ に対し

$$(\Phi f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y) \, f(y) \, dy \qquad (x \in \mathbb{R})$$

とおく．このとき $\Phi f \in F$ を示せ．

(3) 上で定まる線形作用素 $\Phi : F \to F$ は，距離 d に関して連続であることを示せ．