数学専攻入学試験　(2009 年 11 月 21 日 10:00-12:00)

問題は全部で 4 問である．解答には, 問題ごとに別々の答案用紙を用い, それぞれの答案用紙に受験番号, 氏名, 問題番号を記入すること．答案用紙, 下書き用紙は終了後すべて提出し, 持ち帰ってはならない.

問 1.　(X, d) を距離空間とする．X の元 x と X の空でない真の部分集合 A に対し

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a); a \in A\}$$

とおく．このような A を 1 つ固定するとき以下の問いに答えよ.

(1) $d(x, A^c) > 0$ であることと x が A の内点であることが同値であることを示せ．但し A^c は A の補集合とする.

(2) $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$ が, 任意の $x, y \in X$ について成り立つことを示せ.

(3) $f(x) = d(x, A)$ によって定まる関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は連続であることを示せ.

問 2.　k を複素数とする．固有多項式が

$$\Phi(x) = x^3 - 3x + k$$

である複素 3 次正方行列全体からなる集合を $M(k)$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) $M(k)$ は無限集合であることを示せ.

(2) $M(k)$ に属し, かつ対角化できない行列があるという．このような k をすべて求めよ.

(3) $M(k)$ に属するエルミート行列があるという．このような k 全体のなす集合を複素平面上に図示せよ.

(4) $M(k)$ に属するユニタリ行列は存在しないことを示せ.

問 3.　$\mathbb{R}$ 上の関数 $E(x)$ を

$$E(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4} \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定める．以下の問いに答えよ.

(1) 等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(x)dx = 1$$

を示せ.

(2) $u_0(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された連続かつ有界な実数値関数とし,

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x-y)u_0(y)dy \quad (x \in \mathbb{R})$$

とおく. このとき (1) を用いて

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |u(x)| \leq \sup_{-\infty<x<\infty} |u_0(x)|$$

を示せ.

(3) p を $1 \leq p < \infty$ を満たす実数とする. $v_0(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された連続かつ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v_0(x)|^p dx < \infty$$

を満たす実数値関数とし,

$$v(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x-y)v_0(y)dy \quad (x \in \mathbb{R})$$

とおく. このとき (1) を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(x)|^p dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |v_0(x)|^p dx$$

を示せ.

問 4. a を $0 < a < 1$ を満たす定数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 複素関数

$$f(z) = \frac{z^2+1}{2z(1+az)(z+a)}$$

について領域 $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ 内にある極をすべて求め, それぞれの極における $f(z)$ の留数を計算せよ.

(2) 定積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{1+2a\cos\theta+a^2} d\theta$$

の値を求めよ.