2010年度（平成22年度）大学院入試

数 学 問 題 A

実施日時

2009年（平成21年）8月26日（水）

9:00〜12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて５枚である.
- 問題は全部で４問である.
- 解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い，それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること.
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[1] (1) $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の一様連続関数とする．$\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 $g(x)$ に $\mathbb{R}$ 上一様収束するとき，関数列 $\{f(g_n(x))\}_{n=1}^{\infty}$ は，関数 $f(g(x))$ に $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ.

(2) 関数項級数 $h(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ が $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示し，関数列

$$\alpha_n(x) = \sin\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^2}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

が，関数 $\sin(h(x))$ に $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ.

[2]　$M(2,\mathbb{R})$ を 2 次実正方行列全体のなす実線形空間とし，

$$V = \{X \in M(2,\mathbb{R}) \mid {}^tX = X\}$$

とおく．ただし，${}^tX$ は X の転置行列を表す．このとき以下の問に答えよ．

(1) V は

$$\left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

を基底とする $M(2,\mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ．

(2) $A \in M(2,\mathbb{R})$ とする．$X \in V$ に対して，$f_A(X) = {}^tA\,XA$ と定めるとき，f_A は V から V への線形写像であることを示せ．

(3) a を実定数とし，$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，(1) の基底 $\{E_1,\ E_2,\ E_3\}$ に関する f_A の表現行列を求めよ．

(4) 前問 (3) の A に対して，f_A の像 $\mathrm{Im}\ f_A$ の基底をひと組求めよ．

[3]　相異なる m 個の点 $p_1, p_2, \ldots, p_m$ $(m \geq 1)$ を $\mathbb{R}$ に付け加えた集合

$$X_m = \mathbb{R} \cup \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$$

を考え，X_m に次のような集合の全体を開基とする位相を与える．

- $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < 1/n\} \quad (x_0 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid (-1)^k x > (-1)^k n\} \cup \{p_k\} \quad (k = 1, 2, \ldots, m,\ n \in \mathbb{Z})$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) X_1 はコンパクトでないことを示せ．

(2) X_2 は閉区間 $[0,\ 1]$ と同相であることを示せ．

(3) $m \geq 3$ のとき，X_m はハウスドルフ空間でないことを示せ．

[4]　$0 < \varepsilon < 1 < R$ をみたす実数 ε, R に対して，複素平面内の領域

$$D_{\varepsilon,R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0,\ \varepsilon < |z| < R\}$$

を考える．境界 $\partial D_{\varepsilon,R}$ と実軸の正の部分との共通部分を α_1, $\partial D_{\varepsilon,R}$ と実軸の負の部分との共通部分を α_2 とし，線分 α_1, α_2 に $\partial D_{\varepsilon,R}$ から導かれる向きを与える．以下では，$\log z$ は領域 $\mathbb{C} \setminus \{iy \mid y \leq 0\}$ における $\log 1 = 0$ をみたす分枝を考えることにする（i は虚数単位）．

(1) $z = re^{i\theta}$ $(r > 0, r \neq 1, 0 \leq \theta \leq \pi)$ とするとき，不等式

$$\left|\frac{\log z}{z^4+1}\right| \leq \frac{|\log r| + \pi}{|r^4 - 1|}$$

を示せ.

(2) $z = xe^{\pi i}$ $(\varepsilon \leq x \leq R)$ とおくことにより，等式

$$\int_{\alpha_2} \frac{\log z}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\log x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x + i\pi \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$$

を示せ.

(3) 広義積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$$

の値を求めよ.