2010 年度（平成 22 年度）大学院入試

数 学 問 題 B

実施日時

2009 年（平成 21 年）8 月 26 日（水）

13:30〜16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない．
- 問題冊子は表紙も入れて４枚，問題は全部で３問である．
- ３問の中からちょうど２問を選択解答すること．下の欄に，受験番号，氏名を記入し，選択解答した問題の番号を○で囲め．

受験番号	氏名

選択問題番号			
	1	2	3

- 解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い，それぞれ の答案用紙に 受験番号，氏名，問題番号 を記入すること．
- 問題冊子の表紙，答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[1]　複素平面 $\mathbb{C}$ 上の正則函数全体の集合 R は，$f, g \in R$ に対して，和 $f+g$ と積 fg をそれぞれ

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z), \quad (fg)(z) = f(z)g(z) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

と定めることにより可換環になる．$\mathbb{C}$ の部分集合 S に対して

$$I(S) = \{f \in R \mid \text{任意の } a \in S \text{ に対して } f(a) = 0\}$$

とおく．

(1) $I(S)$ は R のイデアルであることを示せ．

(2) S が m 個の点から成る有限部分集合 $\{a_1, \ldots, a_m\} \subset \mathbb{C}$ のとき，$I(S)$ は単項イデアルであることを示し，その生成元 $f \in R$ を $a_1, \ldots, a_m$ を用いて具体的に与えよ．

(3) S が整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ のとき，$I(S) \neq \{0\}$ を示せ．

(4) R はネーター環ではないことを示せ．(一般に，可換環 A の任意のイデアルの増大列 $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$ に対して $I_n = I_{n+1} = \cdots$ となる n が存在するとき，A をネーター環という.)

［2］ 集合

$$C = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid \|\mathbf{x}\| = 1,\ |y| \leq 1\}$$

を，$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ の通常の位相から誘導される位相により位相空間とみなす．ここに，$\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^2$ のユークリッドノルムを表す．C 上の 2 点 $q_1 = (\mathbf{x}_1, y_1)$，$q_2 = (\mathbf{x}_2, y_2)$ は，次の (a), (b), (c) のうちいずれかを満たすときに同値であると定める：

(a) $q_1 = q_2$,

(b) $y_1 = y_2 = 1$ かつ $\mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}_1$,

(c) $y_1 = y_2 = -1$ かつ $\mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}_1$.

この同値関係による C の商位相空間を M とし，$\pi : C \to M$ を商写像とする．

(1) 写像 $\tau : C \to C$ を $\tau(\mathbf{x}, y) = (-\mathbf{x}, -y)$ と定義する．このとき，任意の $q \in C$ に対し

$$T(\pi(q)) = \pi(\tau(q))$$

とすることにより，写像 $T : M \to M$ が矛盾なく定義され，M から M 自身への同相写像になることを証明せよ．また，すべての $\zeta \in M$ に対して $T(T(\zeta)) = \zeta$ が成立することを示せ．

(2) 2 点 $\zeta_1, \zeta_2 \in M$ は，$\zeta_2 = \zeta_1$ または $\zeta_2 = T(\zeta_1)$ となるときに同値であると定める．この同値関係による M の商位相空間 N は，M と同相であることを示せ．但し，T は前問 (1) の同相写像である．

(3) M のオイラー数を求めよ．

[3]　f を $\mathbb{R}$ 上定義された実数値連続関数で，$\mathbb{R}$ 上ルベーグ積分可能なものとする．また，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とする．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f(3^n x + a_n)|$ は，x の関数として $\mathbb{R}$ 上ルベーグ積分可能であることを示せ．

(2) ルベーグ測度に関し，ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}$ に対し級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(3^n x + a_n)$$

は収束することを示せ．

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ のとき，ルベーグ積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(3^n x + a_n)\,dx$$

の値を求めよ．