2014年度（平成26年度）大学院入試

数 学 問 題 B

実施日時

2013年（平成25年）8月21日（水）

13:30 〜 16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない．
- 問題冊子は表紙も入れて４枚，問題は全部で３問である．
- ３問の中から ちょうど２問 を選択解答すること．下の欄に，受験番号，氏名を記入し，選択解答した問題の番号を〇で囲め．

受験番号	氏名

選択問題番号			
	1	2	3

- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙１枚に記入すること．答案用紙の裏面に記入してもよい．
- それぞれ の答案用紙に 受験番号，氏名，問題番号 を記入すること．
- 問題冊子の表紙，答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[1]　$\mathbb{Q}[X]$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の一変数多項式環とし，X^3+X が生成する単項イデアル (X^3+X) による剰余環 $R=\mathbb{Q}[X]/(X^3+X)$ を考える．

(1) R は整域でないことを示せ．

(2) $R\setminus\{0\}$ の 2 元 a,b で，

$$a^2=a,\quad b^2=b,\quad a+b=1$$

をみたすものを 1 組求めよ．

(3) R の乗法群 $R^\times$ の元で位数 4 のものをすべて求めよ．

［2］　4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 M を

$$M = \left\{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x^2 - y^2 + u^2 - v^2 = 0,\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1\right\}$$

で定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) M に $\mathbb{R}^4$ の部分多様体の構造が入ることを示せ．

(2) M の $\mathbb{Z}$ 係数のホモロジー群をすべて求めよ．

(3) $N = M \cap \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 \mid xy + uv = 0\}$ とおく．N が連結かどうか，理由を付けて答えよ．

[3]　区間 $I = [0,1]$ 上の実数値ルベーグ可測関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ に関する以下の問 (1), (2) に答えよ．ただし，m は I 上のルベーグ測度を表すものとする．

(1) I 上の実数値ルベーグ可測関数 f に対して，m に関してほとんど至るところで $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が成り立つとする．このとき，$\mathbb{R}$ 上の任意の実数値有界連続関数 F に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int_I F(f_n(x))\, dm = \int_I F(f(x))\, dm$$

が成り立つことを示せ.

(2) I 上の実数値ルベーグ可測関数 g に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int_I |g_n(x) - g(x)|\, dm = 0$$

が成り立つとする．このとき，次の (i), (ii), (iii) を示せ.

(i) 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} m(\{x \in I \mid |g_n(x) - g(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$

が成り立つ.

(ii) $g_0 = g$ と書くことにすると

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{n\geq 0} m(\{x \in I \mid |g_n(x)| > K\}) = 0$$

が成り立つ.

(iii) $\mathbb{R}$ 上の任意の実数値有界連続関数 F に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int_I F(g_n(x))\, dm = \int_I F(g(x))\, dm$$

が成り立つ.