2014 年度（平成 26 年度）大学院入試

数 学 問 題

実施日時

2013 年（平成 25 年）11 月 16 日（土）

10:00 〜 12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて 5 枚である.
- 問題は全部で 4 問である.
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙 1 枚に記入すること．答案用紙の裏面に記入してもよい.
- それぞれ の答案用紙に 受験番号，氏名，問題番号 を記入すること.
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[1]　$0 < p < 1$ をみたす任意の実数 p に対して，関数 $f(x) = |x|^p$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続であることを示せ.

[2]　V を $\mathbb{C}$ 上の n 次元線形空間とし，$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ を V の基底とする．線形変換 $f : V \to V$ を

$$f(\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i) = c_n \mathbf{v}_1 + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \mathbf{v}_{i+1} \qquad (c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C})$$

によって定める．S に関する f の表現行列を A とするとき，以下の問に答えよ．

(1) A を求めよ．

(2) A の行列式 $\det A$ の値を求めよ．

(3) A の固有値全体のなす集合は，1 の n 乗根全体のなす集合に等しいことを示せ．

[3]　1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $[-2,1]$ を I とし，I に $\mathbb{R}$ から相対位相を入れ位相空間とみなす．相異なる 4 つの元からなる集合 $\{a,b,c,d\}$ を A とし，写像 $g: I \to A$ を

$$g(x) = \begin{cases} a & (-2 \leq x < -1) \\ b & (x = -1, 0) \\ c & (-1 < x < 0) \\ d & (0 < x \leq 1) \end{cases}$$

で定める．A には g により I から誘導された位相を入れる．(従って，A の部分集合 U が A の開集合であるとは，g による U の逆像 $g^{-1}(U)$ が I の開集合であるときに言う.)

(1) A がハウスドルフ空間かどうか理由を付けて答えよ．

(2) $S = \{a,b,c\} \subset A$ とする．S の内部，S の閉包，S の境界を求めよ．

[4]　$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位を表すものとする．a, b を $0 < a < b$ なる定数とし，複素関数

$$f(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}$$

を考える．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $R > 0$ に対して $C_R = \{Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$ とおく．このとき，C_R を積分路とする $f(z)$ の複素線積分に関して

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0$$

が成り立つことを示せ．

(2) 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{x^3 \sin x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}\, dx$$

が収束することを示し，その値を求めよ．