2015 年度（平成 27 年度）大学院入試

# 数 学 問 題 A

実施日時

2014 年（平成 26 年）8 月 25 日（月）

9:00〜12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて５枚である.
- 問題は全部で４問である.
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙１枚に記入すること．答案用紙の裏面に記入してもよい.
- それぞれ の答案用紙に 受験番号，氏名，問題番号 を記入すること.
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[ 1 ] $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で実数値関数 $f$ に一様収束するとする.

(1) 各 $f_n$ が $\mathbb{R}$ 上で一様連続であるならば, $f$ も $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ.

(2) $A_n = \{f_n(x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $A = \{f(x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ とおく. 各 $A_n$ が上に有界ならば, $A$ も上に有界であり,

$$\lim_{n\to\infty}(\sup A_n) = \sup A$$

が成立することを示せ.

[ 2 ] 正方行列 $A$ とその転置行列 ${}^tA$ が, ${}^tA = -A$ の関係をみたすとき, $A$ を交代行列という. 複素数に成分をもつ 3 次交代行列全体の集合を $W$ とすると, $W$ は

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を基底にもつ 3 次元複素ベクトル空間になる. 3 次元複素列ベクトル $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ を固定し, 線形写像 $f_a : \mathbb{C}^3 \longrightarrow W$ を

$$f_a(x) = a\,{}^tx - x\,{}^ta$$

と定義する. ここで列ベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ に対し, ${}^tx = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ は $x$ の転置を表す. 次の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{C}^3$ の基底 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $W$ の基底 $E_1, E_2, E_3$ に関する $f_a$ の表現行列を $T_a$ とする. $T_a$ を求めよ.

(2) $a$ が零ベクトルと異なるとき, $f_a$ の核 $\operatorname{Ker} f_a$ の次元と像 $\operatorname{Im} f_a$ の次元を求めよ.

(3) (1) の $T_a$ が対角化可能でないための $a \in \mathbb{C}^3$ に関する必要十分条件を求めよ.

[ 3 ] $(X, d)$ を距離空間とする．$X$ の空でない部分集合 $A$ と正数 $r$ に対して, $A$ の $r$-近傍 $N_r(A)$ を

$$N_r(A) = \{x \in X \ ; \ d(a, x) < r \text{ をみたす } a \in A \text{ が存在する }\}$$

と定義する.

(1) $K, L$ を $X$ の空でないコンパクト部分集合とするとき, ある $r > 0$ で, $K$ が $N_r(L)$ に含まれ, かつ $L$ が $N_r(K)$ に含まれるようなものが存在することを示せ.

(2) $\mathcal{K}(X)$ を $X$ の空でないコンパクト部分集合全体の集合とする．$\mathcal{K}(X)$ の元 $K, L$ に対して

$$D(K, L) = \inf\{r > 0 \ ; \ K \subset N_r(L) \text{ かつ } L \subset N_r(K)\}$$

と定義する．このとき $(\mathcal{K}(X), D)$ は距離空間になることを示せ.

[ 4 ] 実数 $0 < a < 1$ を固定し，$\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{e^{2\pi a z}}{1 + e^{2\pi z}}$$

と定める．虚数単位を $i$ で表す．次の問いに答えよ．

(1) $R > 0$ に対し, $\gamma_R$ を長方形領域 $S_R = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |\mathrm{Re}\, z| < R,\ 0 < \mathrm{Im}\, z < 1\}$ の境界とし, $\gamma_R$ に $S_R$ の境界としての向き (つまり $S_R$ を左に見て進む向き) を入れる．このとき線積分

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz$$

の値を求めよ.

(2) $R > 0$ に対し, $\pm R$ から $\pm R + i$ への向きのついた線分を $J_R^{\pm}$ (ただし複号同順) とするとき,

$$\left| \int_{J_R^+} f(z)dz \right| + \left| \int_{J_R^-} f(z)dz \right| \to 0 \quad (R \to \infty)$$

を示せ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi a x}}{1 + e^{2\pi x}} dx$ の値を求めよ.