2017 年度（平成 29 年度）大学院入試

数 学 問 題 A

実施日時

2016 年（平成 28 年）8 月 24 日（水）

9:00〜12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて５枚である.
- 問題は全部で４問である.
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙１枚に記入すること．答案用紙の裏面に記入してもよい.
- それぞれ の答案用紙に 受験番号，氏名，問題番号 を記入すること.
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[1] (1) $\{a_n\}, \{b_n\}$ は実数列で，すべての正の整数 n に対して，$|a_n| \leq b_n$ であるとする．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するなら，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束することを示せ.

(2) $f(x)$ は $[0, \infty)$ 上の実数値連続関数で，$x > 0$ では $|f(x)| \leq \min\{x, x^{-1}\}$ であるとする．このとき，各 $x \in [0, \infty)$ に対して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(2^n x)$ が収束することを示せ.

(3) (2) の $f(x)$ について，$\displaystyle\sup_{x \in [0,\infty)} \left| \sum_{n=1}^{\infty} f(2^n x) \right| < \infty$ を示せ.

[2] n を正の整数，A を成分がすべて実数であるような n 次交代行列とする．さらに A は正則であると仮定する．以下 $\mathbb{R}$ は実数体，$\mathbb{C}$ は複素数体を表すものとする．

(1) n は偶数であることを示せ.

(2) A の固有多項式の $\mathbb{C}$ における根はすべて純虚数であることを示せ.

(3) B を成分がすべて実数であるような n 次対称行列であって， $AB = BA$ をみたすものとする．$\alpha \in \mathbb{R}$ を B の固有値とし，固有値 α に属する B の固有空間を $W(B, \alpha) \subset \mathbb{R}^n$ で表す．$AW(B, \alpha) = \{A\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in W(B, \alpha)\}$ とするとき，$AW(B, \alpha) = W(B, \alpha)$ であることを示せ.

(4) (3) の B について，$g_B(t)$ を B の固有多項式とする．このとき，実多項式 $f(t)$ で $g_B(t) = f(t)^2$ をみたすものが存在することを示せ.

[3] 実数全体のなす集合を $\mathbb{R}$，有理数全体のなす集合を $\mathbb{Q}$ とする．$\mathbb{Q}$ のすべての部分集合が開集合となる最弱の位相を $\mathbb{R}$ に入れた位相空間を X とする．

(1) 写像 $f\colon X \to X$ を $f(x) = x+1$ により定める．f は連続写像であることを示せ．

(2) X はハウスドルフ空間であるかどうか，理由をつけて答えよ．

(3) X はコンパクトであるかどうか，理由をつけて答えよ．

(4) $\mathbb{R}$ に通常の位相を入れた位相空間を R とし，写像 $f\colon X \to R$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x\text{ が有理数}) \\ 1 & (x\text{ が無理数}) \end{cases}$$

と定める．f が連続かどうか，理由をつけて答えよ．

[4] 以下 n は正の整数，i は虚数単位とする．

(1) 複素関数 $\dfrac{1}{(z^2+1)^{n+1}}$ の $z=i$ における留数を求めよ．

(2) $R>0$ とする．複素平面上の積分路

$$\Gamma_R : z = Re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

に対し，

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)^{n+1}}$$

を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\pi$ を示せ．