

2019年度（平成31年度）大学院入試

数学問題 A

実施日時

2018年（平成30年）8月22日（水）

9:00～12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない。
- 問題冊子は表紙も入れて5枚、問題は全部で4問である。
- 解答は、問題ごとに別々の答案用紙1枚に記入すること。
答案用紙の裏面に記入してもよい。
- それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること。
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない。

[1] 以下の問いに答えよ.

- (1) \mathbb{R} の区間 I で定義された実数値連続関数の列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が I 上で関数 $f(x)$ に一様収束するとき, $f(x)$ は I で連続であることを示せ.
- (2) $u(x)$ を \mathbb{R} 上の実数値 C^2 級関数とする. 正の整数 n に対して関数 $u_n(x)$ を

$$u_n(x) = u\left(\frac{x}{n}\right) + u\left(-\frac{x}{n}\right) - 2u(0)$$

で定める. $a > 0$ を定数とすると, 関数を項とする級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ は区間 $[-a, a]$ 上である連続関数に一様収束することを示せ.

[2] 複素数を成分とする3次正方行列全体のなす複素ベクトル空間を V とする. $N \in V$ を $N^2 \neq 0$ および $N^3 = 0$ をみたすものとする. ただし, 0 は3次零行列を表す.

(1) 3項列ベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ で, ベクトル $N^2\mathbf{u}, N\mathbf{u}, \mathbf{u}$ が \mathbb{C} 上線形独立となるものが存在することを示せ.

(2) 線形写像 $f: V \rightarrow V$ を

$$f(X) = NX - XN \quad (X \in V)$$

で定めるとき, $f^m = 0$ となる最小の正の整数 m を求めよ. ただし, f^m は f の m 回合成写像 $f^m = \overbrace{f \circ \dots \circ f}^m$ を表す.

[3] A を空でない集合とする. d を A 上の距離関数とし, 距離空間 (A, d) の開集合系を \mathcal{O} とする.

- (1) d が A 上の距離関数であることの定義を述べよ.
- (2) 位相空間 (A, \mathcal{O}) は, ハウスドルフ空間であることを示せ.
- (3) (A, \mathcal{O}) がコンパクトならば, ある正の実数 R が存在して, すべての $a, b \in A$ に対し $d(a, b) < R$ が成り立つことを示せ.
- (4) C_1, C_2 を (A, \mathcal{O}) の相対位相に関してコンパクトな A の部分集合とする. $C_1 \cap C_2$ が空集合ならば, $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ で $C_1 \subset U_1, C_2 \subset U_2$ かつ $U_1 \cap U_2$ が空集合となるものが存在することを示せ.

[4] 虚数単位を i で表す. a を正の定数とし, 複素関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2 + a^2)}$$

で定める.

- (1) 孤立特異点 $z = 0$ における $f(z)$ のローラン展開の主要部を求めよ.
- (2) $r > 0$ に対し, 曲線 C_r を $C_r : z = re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) で定める. このとき $\lim_{r \rightarrow +0} \int_{C_r} f(z) dz$ と $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} f(z) dz$ の値を求めよ.
- (3) $0 < r < a < R$ なる実数 r, R に対し,

$$D_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R \text{ かつ } \operatorname{Im} z > 0\}$$

とおく. $D_{r,R}$ の境界に正の向き (つまり $D_{r,R}$ を左手に見て進む向き) を入れたものを $\partial D_{r,R}$ で表す. このとき $\int_{\partial D_{r,R}} f(z) dz$ の値を求めよ.

- (4) 広義積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2 + a^2)} dx$ の値を求めよ.