2020年度（令和2年度）大学院入試

数学問題A

実施日時

2019年（令和元年）8月21日（水）

9:00～12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない．
- 問題冊子は表紙も入れて5枚，問題は全部で4問である．
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙1枚に記入すること．
  答案用紙の裏面に記入してもよい．
- それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること．
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[1] 以下の問いに答えよ.

(1) 閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 $f(x)$ は $[0,1]$ 上一様連続であることを示せ.

(2) $[0,1]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が関数 $f(x)$ に一様収束するとき，$f(x)$ は $[0,1]$ 上連続であることを示せ．また

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

であることを示せ.

[2] 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に点 $O(0,0,0)$, $P(-4,-1,1)$, $Q(1,4,-1)$, $R(m,n,0)$ が与えられ，次の条件 (i), (ii) をみたすとする．

(i) 3 点 P,Q,R は正三角形の頂点である．

(ii) ある線形変換 $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が存在して，

$$(*) \qquad \left\{f(\overrightarrow{OP}), f(\overrightarrow{OQ}), f(\overrightarrow{OR})\right\} = \left\{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}\right\} \quad \text{および} \quad f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OR}.$$

以下の問いに答えよ．

(1) m,n を求めよ．

(2) 条件 (ii) の $(*)$ をみたす線形変換 f のうち，直交変換であるものは，いくつあるか．理由とともに答えよ．

[3] 位相空間の点列 $\{x_n\}$ がその位相空間の点 x に収束するとは，x の任意の開近傍 U に対して自然数 n_0 が存在して，$n \geqq n_0$ ならば $x_n \in U$ をみたすことをいう．このとき，x を点列 $\{x_n\}$ の極限という．次の問いに答えよ．

(1) 位相空間 X の点列 $\{x_n\}$ が x に収束するとする． X がハウスドルフ空間ならば，極限 x は一意的であることを示せ．

(2) 位相空間 X と X の点列 $\{x_n\}$ で極限がちょうど 2 つあるような例をあげよ．

(3) 位相空間 X から位相空間 Y への連続写像 $f : X \to Y$ について，X の点列 $\{x_n\}$ が x に収束するならば，Y の点列 $\{f(x_n)\}$ は $f(x)$ に収束することを示せ．

[4] ε, R を正数とする．複素数平面の原点を中心とする半径 ε の八分円板

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq \varepsilon,\, 0 \leqq \mathrm{Im}\, z \leqq \mathrm{Re}\, z\}$$

の境界を正の向きに 1 周する閉曲線の八分円周の部分を C_ε とする．また，$\mathrm{Im}\, z$ が増加する方向に向きをつけた有向線分

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z = R + iy,\, 0 \leqq y \leqq R\}$$

を S_R とする．以下の問いに答えよ．

(1) C_ε に沿った複素積分について，$\varepsilon \to 0$ としたときの極限

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{\exp(-z^2/2)}{z}\, dz$$

を求めよ．

(2) S_R に沿った複素積分について，$R \to \infty$ としたときの極限

$$\lim_{R \to \infty} \int_{S_R} \frac{\exp(-z^2/2)}{z}\, dz$$

を求めよ．

(3) (1), (2) の結果を用いて，積分

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-x^2/2) - \cos x^2}{x}\, dx$$

の値を求めよ．