2020 年度（令和 2 年度）大学院入試

数 学 問 題 B

実施日時

2019 年（令和元年）8 月 21 日（水）

13:30〜16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない．
- 問題冊子は表紙も入れて 7 枚，問題は全部で 6 問である．
- 6 問の中から ちょうど 3 問 を選択して解答すること．下の欄に，受験番号，氏名を記入し，選択した問題の番号を○で囲め．

受験番号	氏名

選択問題番号						
	1	2	3	4	5	6

- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙 1 枚に記入すること．
  答案用紙の裏面に記入してもよい．
- それぞれ の答案用紙に 受験番号，氏名，問題番号 を記入すること．
- 問題冊子の表紙，答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[1] 群 Γ の正規部分群 M, N に対し,「$\Gamma = M \bowtie N$ が成立する」とは, $M \cap N = \{1\}$ であり, かつ Γ の任意の元 g が $g = xy$ ($x \in M, y \in N$) なる形に表せることをいう（ここで 1 は Γ の単位元を表す）. このとき,

(1) M の任意の元 x と N の任意の元 y は, Γ において $xyx^{-1}y^{-1} = 1$ をみたすことを示せ.

以下, p を素数, C を位数 p の巡回群とする. また, 群 G の正規部分群 F_1, F_2, H_1, H_2 に対し, $G = F_1 \bowtie H_1$ および $G = F_2 \bowtie H_2$ が成立し, かつ, 群同型 $F_1 \cong F_2 \cong C$ が存在したとする. このとき, 次の問いに答えよ.

(2) もし $F_1 \cap H_2 = \{1\}$ ならば, $G = F_1 \bowtie H_2$ が成立することを示せ. ここで $1 \in G$ は群 G の単位元を表す.

(3) もし $F_1 \subset H_2$ かつ $F_2 \subset H_1$ ならば, 群同型 $H_2/F_1 \cong H_1/F_2$ が存在することを示せ.

(4) 群同型 $H_1 \cong H_2$ が存在することを示せ.

[2] p を素数，$\mathbb{F}_p$ を有限体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とし，$a, b, c \in \mathbb{F}_p$ に対して行列 $A_{a,b,c}$ を

$$A_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

と定義する．$R = \{A_{a,b,c} \mid a, b, c \in \mathbb{F}_p\}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) R は行列の加法・乗法に関して環をなすことを示せ．

(2) R の乗法は交換法則をみたすことを示せ．

(3) R が整域であるか否かを理由とともに答えよ．

(4) 正の整数 n に対して，写像 $f_n : R \to R$ を

$$f_n(A_{a,b,c}) = A_{a,b,c}^n \qquad (a, b, c \in \mathbb{F}_p)$$

により定める．f_n が環の準同型写像となるような n をすべて求めよ．

(5) R はただ一つの極大イデアルを持つことを示せ．

[3] $\mathbb{R}^3$ 内に，一般の位置にある 4 点 v_0, v_1, v_2, v_3 をとる．向きづけられた 1 単体

$$e_1 = (v_0v_1), \quad e_2 = (v_0v_2), \quad e_3 = (v_0v_3), \quad e_4 = (v_1v_2), \quad e_5 = (v_2v_3), \quad e_6 = (v_3v_1)$$

と向きづけられた 2 単体

$$f_1 = (v_0v_1v_2), \quad f_2 = (v_0v_2v_3)$$

に対して，複体 K を

$$K = \{|v_0|, |v_1|, |v_2|, |v_3|, |e_1|, |e_2|, |e_3|, |e_4|, |e_5|, |e_6|, |f_1|, |f_2|\}$$

と定める．ただし，向きづけられた単体 σ に対し，$|\sigma|$ は σ の向きを問わない単体を表し，$|v_i|$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ は 0 単体 $\{v_i\}$ を表す．

このとき，複体 K の整係数ホモロジー群 $H_k(K)$（$k = 0, 1, 2$）を求めよ．

[4] m と k を $1 \leqq k \leqq m$ をみたす自然数とする．実数を成分とする $k \times m$ 行列全体の集合を $M_{k,m}$ とする．$M_{k,m}$ の部分集合 $V_{k,m}$ を

$$V_{k,m} = \{A \in M_{k,m} \mid A\,{}^t\!A = I_k\}$$

と定める．ここで I_k は k 次単位行列とし，${}^t\!A$ は A の転置行列とする．$M_{k,m}$ を km 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{km}$ と同一視して，$V_{k,m}$ を $\mathbb{R}^{km}$ の部分集合とみなす．以下の問いに答えよ．

(1) C^∞ 級写像 $f : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (|\boldsymbol{x}|^2, |\boldsymbol{y}|^2, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$$

と定める．ここで $|\boldsymbol{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2$, $|\boldsymbol{y}|^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2$, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_m y_m$ である．このとき $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{2m}$ における f のヤコビ行列を求めよ．

(2) $V_{2,m}$ は $\mathbb{R}^{2m}$ の $(2m-3)$ 次元 C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

(3) $V_{3,m}$ は $\mathbb{R}^{3m}$ の $(3m-6)$ 次元 C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

[5] xy 平面の開集合 D 上で定義された C^1 級関数 $u(x,y), v(x,y)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) uv 平面全体で定義された C^1 級関数 $F(u,v)$ が

$$F_u(u,v)^2 + F_v(u,v)^2 \neq 0$$

をみたし，かつ，D 上恒等的に

$$F(u(x,y), v(x,y)) = 0$$

をみたすとする．このとき，D 上恒等的に

$$u_x(x,y)v_y(x,y) - u_y(x,y)v_x(x,y) = 0$$

が成立することを示せ．

(2) D 上の C^1 級関数 $u(x,y), v(x,y)$ が D 上恒等的に

$$u_x(x,y)v_y(x,y) - u_y(x,y)v_x(x,y) = 0$$

をみたし，かつ，D の点 $\mathrm{P}(a,b)$ において

$$u_y(a,b) \neq 0$$

であるとする．このとき，点 $(u(a,b), v(a,b))$ の近傍で定義された C^1 級関数 $F(u,v)$ で

$$F_u(u,v)^2 + F_v(u,v)^2 \neq 0$$

かつ，点 $\mathrm{P}(a,b)$ の近傍において恒等的に

$$F(u(x,y), v(x,y)) = 0$$

をみたすものが存在することを示せ．

[6] 区間 $[0, \infty)$ 上のルベーグ可測関数 $f(x)$ について

$$\int_0^\infty \frac{|f(x)|}{x+1}\,dx < \infty$$

を仮定する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $s > 0$ に対して

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$$

とおくとき，$g(s)$ は s の連続関数であることを示せ．

(2) $0 < a < b$ に対して

$$\int_a^b g(s) \cos s\,ds = \int_0^\infty \left(\int_a^b e^{-sx} \cos s\,ds \right) f(x)\,dx$$

を示せ．

(3) 広義積分

$$\int_0^\infty g(s) \cos s\,ds$$

が収束し，等式

$$\int_0^\infty g(s) \cos s\,ds = \int_0^\infty \frac{x}{x^2+1} f(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ．