2022年度（令和4年度）大学院入試

数 学 問 題 A

実施日時

2021年（令和3年）8月25日（水）

9:00〜12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて5枚，問題は全部で4問である.
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙1枚に記入すること.
  答案用紙の裏面に記入してもよい.
- それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること.
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[1] 以下の問いに答えよ．

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ が収束するような正の実数 α の範囲を求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x^\beta}dx$ が収束するような正の実数 β の範囲を求めよ．

[2] n 次実正方行列 A が歪対称である，すなわち $A + A^T = O$ が成立すると仮定する．ただし A^T は行列 A の転置を表す．n 行 1 列の実行列全体のなす実ベクトル空間を $\mathbb{R}^n$ で表し，$x,\, y \in \mathbb{R}^n$ に対し，$b(x, y) \in \mathbb{R}$ を $x^T A y$ の唯一の成分とする．

(1) 任意の $x,\, y \in \mathbb{R}^n$ に対し，$b(x, y) = -b(y, x)$ が成り立つことを示せ．

線型写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $f(x) = Ax$ と定める．

(2) x, y の少なくとも一方が $\ker f$ の元ならば $b(x, y) = 0$ となることを示せ．

線型部分空間 $V \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n = V \oplus \ker f$ となるようにとる．これに対し，写像 $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$ を $B(x, y) = b(x, y)$ と定める．

(3) $x \in V$ が零ベクトルでないならば，$B(x, y) \neq 0$ をみたす $y \in V$ が存在することを示せ．

(4) 歪対称な奇数次実正方行列の行列式は 0 であることを示せ．

(5) $\operatorname{rank} A$ は偶数であることを示せ．

[3] コンパクト位相空間 X と位相空間 Y の直積位相空間 $X \times Y$ について以下の問いに答えよ．

(1) 任意の $y \in Y$ をとる．このとき，$X \times \{y\}$ を含む任意の開集合 $U \subset X \times Y$ に対して，$X \times V \subset U$ をみたす y の近傍 V が存在することを示せ．

(2) 射影 $p_Y : X \times Y \to Y$ は閉写像であることを示せ．

[4] 正の実数 x をパラメータに持つ複素関数

$$f(z) = \frac{e^{xz}}{z^2+1} \quad (z \in \mathbb{C})$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ のすべての極と，それぞれの極での留数を求めよ．

(2) 任意の $R > 1$ に対して，領域

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R,\ \mathrm{Re}\, z \leq 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}\, z < 1,\ |\mathrm{Im}\, z| < R\}$$

の境界を C とする．C に正の向き (領域 D を左に見る向き) を与えるとき，複素積分

$$\int_C f(z)\, dz$$

を求めよ．

(3) 次の複素積分の極限値を求めよ．

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} f(z)\, dz$$

ただし，i は虚数単位，積分の経路 L_R は $1 - iR$ を始点とし $1 + iR$ を終点とする線分である．