2022年度（令和4年度）大学院入試

数学問題B

実施日時

2021年（令和3年）8月25日（水）

13:30〜16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない．
- 問題冊子は表紙も入れて7枚，問題は全部で6問である．
- 6問の中から ちょうど3問 を選択して解答すること．下の欄に，受験番号，氏名を記入し，選択した問題の番号を○で囲め．

受験番号	氏名

選択問題番号						
	1	2	3	4	5	6

- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙1枚に記入すること．答案用紙の裏面に記入してもよい．
- それぞれ の答案用紙に 受験番号，氏名，問題番号 を記入すること．
- 問題冊子の表紙，答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[1] $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を非負整数全体の集合とする．$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の部分集合 S が次の条件 (i)，(ii)，(iii) をみたすと仮定する．

(i) $0 \in S$.

(ii) $s, t \in S \Rightarrow s + t \in S$.

(iii) S の補集合は有限集合.

以下の問いに答えよ．

(1) ある正の整数 k と全射 $\pi\colon (\mathbb{Z}_{\geq 0})^k \to S$ であって，任意の $u, v \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^k$ に対し，$\pi(u+v) = \pi(u) + \pi(v)$ をみたすものが存在することを証明せよ．ただし直積集合 $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^k$ における和は成分ごとの和と定める．

次に，$I = \{s \in S \mid s > 0\}$，$\widetilde{S} = \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid s \in I \Rightarrow s + n \in I\}$ と定める．

(2) $\widetilde{S} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ をみたす S をすべて挙げよ．

(3) 以下の 2 条件が同値であることを示せ．

(a) $S = \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(b) $S = \widetilde{S}$.

[2] F を有限体 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$，$F[X]$ を X を変数とする多項式環とし，$F[X]$ の元 $\varphi(X)$ を $\varphi(X) = X^3 + 2X + 1 \in F[X]$ と定める．また，$F[X]$ の部分集合 I，J を以下のように定義する．

$$I = \{aX^2 + bX + c \mid a + b + c = 0 \ (a, b, c \in F)\},$$
$$J = \{f(X)\varphi(X) \mid f(X) \in F[X]\}.$$

以下の問いに答えよ．

(1) $I \cap J$ を求めよ．

(2) J は $F[X]$ の素イデアルであることを示せ．

次に $F[X]$ から剰余環 $F[X]/J$ への自然な射影を $p : F[X] \to F[X]/J$ とあらわす．

(3) $p(X^{13}) = p(g(X))$ をみたす 2 次以下の多項式 $g(X) \in F[X]$ を求めよ．

(4) 集合の等式
$$p(I) = \{0\} \cup \{\pm p(X^s) \mid s \in S\}$$
が成り立つような正の整数の有限集合 S が存在するかどうか答えよ．また，存在する場合は $\sum_{s \in S} s$ を最小にするような例を与え，存在しない場合はその理由を述べよ．

[3] 実 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の座標を (x, y) とし，$\mathbb{R}^2$ から原点 $(0,0)$ と点 $(1,1)$ を取り除いた $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間を $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,1)\}$ とする．X 上の 2 つの 1 次微分形式 α, β を

$$\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}, \qquad \beta = \frac{(x-1)dy - (y-1)dx}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

とする．原点 $(0,0)$ を中心とする半径 1 の円周を反時計回りに 1 周する道を C_0，点 $(1,1)$ を中心とする半径 1 の円周を反時計回りに 1 周する道を C_1 とする．

(1) 次の 4 つの線積分をそれぞれ求めよ．

$$\int_{C_0} \alpha, \qquad \int_{C_1} \alpha,$$
$$\int_{C_0} \beta, \qquad \int_{C_1} \beta.$$

(2) X 上のある C^∞ 関数 f を用いて $\dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ と表される X 上の 1 次微分形式を完全形式という．定数 λ, μ が $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ のとき，$\lambda\alpha + \mu\beta$ は完全形式とはならないことを示せ．

(3) X の実係数ホモロジー群 $H_p(X, \mathbb{R})$ $(p = 0, 1, 2)$ を求めよ．

[4] 実6次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ の部分集合

$$T = \{ (A, B, C) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid A, B, C \text{ は } \mathbb{R}^2 \text{ の同一直線上にない} \}$$

について以下の問いに答えよ．

(1) T は $\mathbb{R}^6$ の開集合であることを示せ．

(2) 各 $(A, B, C) \in T$ を三角形 ABC と対応させることで，T を $\mathbb{R}^2$ 上の頂点が順序づけられた三角形の集合とみなす．T の部分集合で，$\angle$ABC が直角となる直角三角形全体の集合を R とおく．前問 (1) により，T は $\mathbb{R}^6$ の開部分多様体となる．このとき R は T の部分多様体となることを示せ．また R の次元を求めよ．

(3) R は T の強変位レトラクトとなることを示せ．ここで与えるべき強変位レトラクションとは，連続写像の族 $\phi_s \colon T \to T$ $(s \in [0, 1])$ で以下の条件をすべてみたすものである．

- 写像 $\Phi \colon [0, 1] \times T \to T$ を
$$\Phi(s, t) = \phi_s(t) \quad (s \in [0, 1],\ t \in T)$$
と定めたとき，Φ は連続である．
- 各 $s \in [0, 1]$ に対して，制限 $\phi_s|R$ は R の恒等写像である．
- $\phi_1(T) = R$ が成り立つ．
- ϕ_0 は T の恒等写像である．

(4) T の連結成分の個数を求めよ．

[5] $a \in \mathbb{R}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 連続関数 $u\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ が (a,∞) 上 C^1 級で，かつ

$$u'(x) \le u(x) \quad (a < x < \infty)$$

をみたすならば

$$u(x) \le u(a)\, e^{x-a} \quad (a \le x < \infty)$$

が成り立つことを示せ．

(2) 連続関数 $v\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ が (a,∞) 上 C^1 級で，かつ

$$|v'(x)| \le |v(x)| \quad (a < x < \infty),$$
$$v(a) = 0$$

をみたすならば

$$v(x) = 0 \quad (a \le x < \infty)$$

であることを示せ．

[6] $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可積分関数の列 $\{f_n\}$ とルベーグ可積分関数 f について以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\,dx<\infty$ ならば，ほとんどすべての $x\in\mathbb{R}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ が存在することを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|\,dx=0$ ならば，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)\right|dx\leq 1$ をみたす $\{f_n\}$ の部分列 $\{f_{n_k}\}$ が存在することを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|\,dx=0$ とし，$\{f_{n_k}\}$ を前問 (2) の部分列とする．このとき，ほとんどすべての $x\in\mathbb{R}$ に対して，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=f(x)$ が成り立つことを示せ．