連分数とディオファントス近似

水谷 治哉（ミズタニ ハルヤ)
大阪大学大学院理学研究科

8 月 9 日

高校生のための公開講座

はじめに

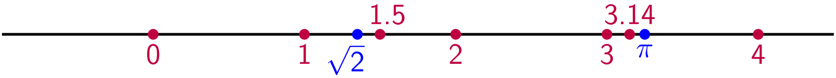
ディオファントス近似の問題

有理数を使って無理数の「良い」近似を求めたい.

- 実数：数直線上の点.
- **有理数**：実数のなかで, 分数 $\frac{p}{q}$ の形に表せるもの.
- **無理数**：実数のなかで, 有理数ではないもの.

ここで p は整数 $(0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$, q は自然数 $(0, 1, 2, \ldots)$

- **有理数**：$0,\ 1,\ 1.5 = \dfrac{3}{2},\ 3.14 = \dfrac{314}{100},\ \ldots$
- **無理数**：$\sqrt{2} = 1.4142\ldots,\ \pi = 3.141592\ldots$ (円周率), …



講演のアウトライン

- 無理数を有理数で近似する
  - 素朴な方法
  - 連分数とは
  - 連分数を使った無理数の近似 – 具体例を中心に –
- 連分数展開の収束
- 無理数の良い近似
  - 良い近似とは？
  - 連分数近似は良い近似である

§1. 無理数を有理数で近似する

素朴な方法

無理数 $\longrightarrow$ 無限小数表示 $\longrightarrow$ 有限で打ち切る

- $\sqrt{2} = 1.4142135623\ldots \to \sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$
- $\sqrt{2} = 1.4142135623\ldots \to \sqrt{2} \fallingdotseq 1.41421356$

誤差：

$$\left|\sqrt{2} - \frac{141}{100}\right| < \frac{5}{10^3} = \frac{1}{10^2} \cdot \frac{5}{10} < \frac{1}{10^2}$$

$$\left|\sqrt{2} - \frac{141421356}{100000000}\right| < \frac{3}{10^9} = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{3}{10} < \frac{1}{10^8}$$

観察

$$\text{誤差} < \frac{1}{\text{近似有理数の分母}}$$

連分数とは

整数 a_0 **と自然数** $a_1, a_2, \dots, a_n$ **に対して**

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

のように, $\square + \dfrac{1}{\triangle}$ **の形が入れ子に現れる有理数を連分数といい,**

$$[a_0, a_1, \dots, a_n]$$

と表す. また, 実数を連分数で表すことを連分数展開という.

連分数とは

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

a_0 は整数

$a_1, a_2, \dots, a_n$ は自然数

例：

$$\frac{7}{5} = [1, 2, 2] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$$

$$\frac{3}{4} = [0, 1, 3] = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}$$

$$\frac{17}{12} = [1, 2, 2, 2] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$

連分数展開の求め方

α の連分数展開を求めたい

(1) α を整数部分 a_0 と小数部分 b_0 に分ける

$$\alpha = a_0 + b_0 \quad (0 < b_0 < 1)$$

(2) $\alpha_1 = \dfrac{1}{b_0}$ とおいて，α_1 を整数部分 a_1 と小数部分 b_1 に分ける

$$\alpha_1 = a_1 + b_1 \quad (0 < b_1 < 1)$$

このとき　$\alpha = a_0 + b_0 = a_0 + \dfrac{1}{\alpha_1} = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + b_1}$

(3) $\alpha_2 = \dfrac{1}{b_1}$ とおいて，α_2 を整数部分 a_2 と小数部分 b_2 に分ける

(4) この操作を小数部分 b_n が 0 になるまで続ける．

有理数の連分数展開

$$\frac{7}{5} = \underbrace{1}_{\text{整数部分}} + \underbrace{\frac{2}{5}}_{\text{小数部分}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \cfrac{1}{\underbrace{2}_{\text{整数部分}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{小数部分}}}$$

$$= \underbrace{1}_{a_0} + \cfrac{1}{\underbrace{2}_{a_1} + \cfrac{1}{\underbrace{2}_{a_2} + 0}}$$

$$= [1, 2, 2]$$

(1) $\square = a + b$. a は $\square$ の整数部分, $0 < b < 1$ は小数部分.

(2) 新たに $\square = \frac{1}{b}$ (> 1) とおいて, (1) を適用する.

(3) 小数部分が $b = 0$ となるまで, これを繰り返す.

有理数の連分数展開

(1) $\dfrac{3}{4} = [0, 1, 3].\ (\because)$

$$\frac{3}{4} = \underbrace{0}_{\text{整数部分}} + \underbrace{\frac{1}{\frac{4}{3}}}_{\text{小数部分}} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + 0}} = [0, 1, 3]$$

(2) $\dfrac{17}{12} = [1, 2, 2, 2].\ (\because)$

$$\frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{12}{5}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{5}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 0}}} = [1, 2, 2, 2]$$

同様の手続きを $\sqrt{2}$ **に対して適用してみる**.

(1) $0 < \sqrt{2}-1 < 1$ **だから**, $\sqrt{2} = \underbrace{1}_{a_0} + \underbrace{\sqrt{2}-1}_{b_0}$.

(2) $\sqrt{2}-1$ **の逆数を整数部分と小数部分に分ける**.

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} \overset{\text{有理化}}{=} \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1 = \underbrace{2}_{\text{整数部分}} + \underbrace{\sqrt{2}-1}_{\text{小数部分}}$$

よって, $\quad \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}-1 = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}} = \underbrace{1}_{a_0} + \cfrac{1}{\underbrace{2}_{a_1} + \underbrace{\sqrt{2}-1}_{b_1}}$

(3) **小数部分が** $b_1 = b_0$ **なので**, (2) **と同様の計算から**,

$$\sqrt{2} = \underbrace{1}_{a_0} + \cfrac{1}{\underbrace{2}_{a_1} + \underbrace{\sqrt{2}-1}_{b_1}} = \underbrace{1}_{a_0} + \cfrac{1}{\underbrace{2}_{a_1} + \cfrac{1}{\underbrace{2}_{a_2} + \underbrace{\sqrt{2}-1}_{b_2}}}$$

$\sqrt{2}$ の連分数展開

この計算を続けていくと，形式的には $\sqrt{2}$ の無限連分数展開

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}}}$$

が得られる．これを，次のように表そう

$$\sqrt{2} \sim [1, 2, 2, 2, \ldots]$$

注意

これは形式的な計算．本当に等式 $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots]$ が成り立つかどうかはまだ分からない．

$\sqrt{3}$ の連分数展開

(1) $1 < \sqrt{3} < 2$ **だから** $\sqrt{3} = \underset{a_0}{1} + \underset{b_0}{\sqrt{3} - 1}$.

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ **より**,

$$\sqrt{3} = \underset{a_0}{1} + \cfrac{1}{\underset{a_1}{1} + \underset{b_1}{\cfrac{\sqrt{3}-1}{2}}}$$

(3) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3} - 1$ **より** $a_2 = 2,\ b_2 = \sqrt{3} - 1$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = 1 + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ **より** $a_3 = 1,\ b_3 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

(5) **以下**, (2),(3) **の計算を繰り返せば**,

$$a_4 = 2,\ a_5 = 1,\ a_6 = 2, \ldots,\ a_{2m+1} = 1,\ a_{2m} = 2, \ldots.$$

$\sqrt{3}$ の連分数展開

以上から

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}}$$

よって,

$$\sqrt{3} \sim [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...]$$

黄金比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の連分数展開

$g = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ **とおくと**

- $$g^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = g+1$$
- $$g = 1 + \frac{1}{g} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{g}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{g}}} = \cdots$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim [1, 1, 1, \ldots]$$

その他の具体例

これ以外にも，例えば

- $\sqrt{5} \sim [2, 4, 4, 4, 4, \ldots]$
- $\pi \sim [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, \ldots]$
- $e \sim [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, \ldots]$

など…

無理数の連分数展開

事実

無理数 α **の連分数展開は必ず無限に伸びていく．**

- $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ X
- $\alpha \sim [a_0, a_1, a_2, \dots]$ ◯

なぜなら，もし無理数 α **の連分数展開が有限で終わって**

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

と表せたとすると， a_0 **は整数，** $a_1, \dots, a_n$ **は自然数なので，** α **は有理数となってしまい，** α **が無理数であることに矛盾するから．**

§2. 連分数展開の収束

問い

無理数 α **の連分数展開** $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ **は本当に** α **と一致するか？**

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots] \ ?$$

数列の極限

数列 $c_0, c_1, c_2, \dots$ に対して

- n を限りなく大きくすると, c_n が α に限りなく近づいていくとき
$$c_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$
と表す.

- n を限りなく大きくすると, c_n が 限りなく大きくなるとき
$$c_n \to \infty \quad (n \to \infty)$$
と表す.

具体例：$\dfrac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty)$. $n^2 \to \infty \ (n \to \infty)$.

改めて問い

無理数 α の連分数展開 $[a_0, a_1, a_2, ...]$ は本当に α と一致するか？

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, ...] \ ?$$

より正確には

$$[a_0, a_1, a_2, ..., a_n] \quad (n = 0, 1, 2...)$$

を 連分数展開を第 n 項までで打ち切ってできる数列とするとき,

$$[a_0, a_1, a_2, ...a_n] \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

が成り立つか？

連分数展開の誤差 – 具体例 –

$\sqrt{2} \sim [1, 2, 2, ...]$ **の近似** $[1, 2, ..., 2]$ **を既約分数で表すと**

$$[1,2] = \frac{3}{2},\ [1,2,2] = \frac{7}{5},\ [1,2,2,2] = \frac{17}{12},\ [1,2,2,2,2] = \frac{41}{29}, \dots$$

これらと $\sqrt{2}$ **との誤差は**

$$\left|\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right| \fallingdotseq \frac{0.34}{2^2} < \frac{1}{2^2}, \qquad \left|\sqrt{2} - \frac{7}{5}\right| \fallingdotseq \frac{0.35}{5^2} < \frac{1}{5^2},$$

$$\left|\sqrt{2} - \frac{17}{12}\right| \fallingdotseq \frac{0.35}{12^2} < \frac{1}{12^2}, \qquad \left|\sqrt{2} - \frac{41}{29}\right| \fallingdotseq \frac{0.35}{29^2} < \frac{1}{29^2}$$

観察

$$\textbf{誤差} < \frac{1}{(\textbf{近似有理数の分母})^2}$$

連分数展開の誤差 – 一般の場合 –

定理 1

- $\alpha \sim [a_0, a_1, a_2 ...]$：無理数 α の連分数展開
- $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, a_2, ..., a_n]$： n 項までの有限近似

と仮定する．このとき，次が成り立つ：

- $q_n \to \infty \ (n \to \infty)$.
- $n = 2, 3, ...$ に対して α と $\dfrac{p_n}{q_n}$ の誤差は $\dfrac{1}{q_n^2}$ 未満：
$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$$
- 特に，$[a_0, a_1, a_2, ..., a_n] \to \alpha \ (n \to \infty)$

連分数展開と漸化式

$\alpha \sim [a_0, a_1, a_2, \ldots]$, $p_n/q_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$.

補題

(1) $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$.

(2) $n = 2, 3, \ldots$ **に対して**, p_n, q_n **は次の 3 項間漸化式を満たす**.

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$$

(3) **無理数** α_{n+1} **を関係式** $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \alpha_{n+1}]$ **で定めると**

$$\alpha_n > 1 \quad \text{かつ} \quad \alpha = \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

定理 1 の証明その 1

- $\alpha \sim [a_0, a_1, a_2, \ldots]$, $p_n/q_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$.
- $p_0 = a_0,\ \ q_0 = 1,\ \ p_1 = a_0 a_1 + 1,\ \ q_1 = a_1 \ \ \cdots\ (\diamondsuit)$
- $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$, $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \ \ \cdots\ (\spadesuit)$

ステップ 1：($\spadesuit$) の第２式から

$$q_n > q_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

この不等式と q_n が自然数であることを合わせれば

$$q_n > n \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

が成り立つことが分かる．特に，$q_n \to \infty\ (n \to \infty)$ が成り立つ．

定理 1 の証明その 2

- $\alpha \sim [a_0, a_1, a_2, ...]$, $p_n/q_n = [a_0, a_1, ..., a_n]$.
- $p_0 = a_0,\ \ q_0 = 1,\ \ p_1 = a_0 a_1 + 1,\ \ q_1 = a_1 \ \ \cdots\ (\diamondsuit)$
- $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2},\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \ \ \cdots\ (\spadesuit)$

ステップ 2：$p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n$. **実際に**,

$$
\begin{aligned}
p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} &\overset{(\spadesuit)}{=} p_{n-1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) - (a_n p_{n-1} + p_{n-2})q_{n-1} \\
&= -(p_{n-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n-2}) \\
&= (-1)^2(p_{n-3}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-3}) \\
\cdots &= (-1)^{n-1}(p_0 q_1 - p_1 q_0) \\
&\overset{(\diamondsuit)}{=} (-1)^{n-1}(a_0 a_1 - a_0 a_1 - 1) = (-1)^n
\end{aligned}
$$

定理 1 の証明その 3

- $p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n \cdots (\heartsuit)$
- $\alpha = \dfrac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} \quad \cdots \quad (\clubsuit)$
- $\alpha_{n+1} > 1$.

ステップ 3：$n = 2, 3, , , ,$ **に対して**

$$
\begin{aligned}
\alpha - \frac{p_n}{q_n} &\overset{(\clubsuit)}{=} \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \\
&= \frac{(\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1})q_n - (\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})p_n}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \\
&= \frac{p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \overset{(\heartsuit)}{=} \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n}.
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{(\underbrace{\alpha_{n+1}}_{>1} q_n + \underbrace{q_{n-1}}_{>1})q_n} < \frac{1}{q_n^2}
$$

定理 1 の証明その 4

- $\alpha \sim [a_0, a_1, a_2, ...]$, $p_n/q_n = [a_0, a_1, ..., a_n]$.
- $q_n \to \infty \quad (n \to \infty)$
- $\left|\alpha - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{q_n^2}$

ステップ 4：ステップ 1, 3 より

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

ゆえに $[a_0, a_1, ..., a_n] \to \alpha \ (n \to \infty)$, **すなわち**, **等式**

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, ...]$$

が成り立つことがわかった.

定理 1 の逆

定理 1

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots], \ \frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n] \quad \Rightarrow \quad \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

この定理 1 の逆

$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{q}$ **は** α **の連分数展開を有限でうち切ったもの**

は一般には成立しない. ただし, 次の定理が成り立つ.

ラグランジュの定理

$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{q}$ **は** α **の連分数展開を有限でうち切ったもの**

§3. 無理数の良い近似

素朴な方法 vs 連分数展開

- **素朴な方法：誤差** $<$ **(近似有理数の分母)**$^{-1}$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$$

- **連分数を用いた近似：誤差** $<$ **(近似有理数の分母)**$^{-2}$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

観察

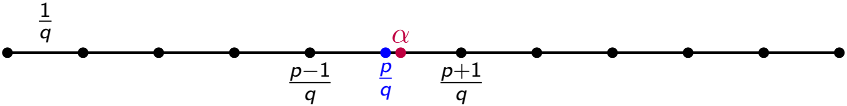
- **分母が十分大きいと，連分数近似の方が誤差が小さい．**
- **連分数近似の方が良い近似であると言えるか？**

良い近似

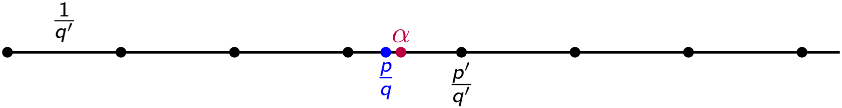
無理数 α の良い近似 $\dfrac{p}{q}$ を次で定める：

> $\dfrac{p'}{q'} \neq \dfrac{p}{q}$ **かつ** $q' \leq q$ **ならば** $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \left|\alpha - \dfrac{p'}{q'}\right|$ **が成り立つ**

- **数直線を長さ $\frac{1}{q}$ で等間隔に区切って, α に一番近い $\frac{p}{q}$ を選ぶ**



- **それ以上粗く区切る $(q' \leq q)$ とよい近似が得られない**



連分数展開は良い近似である

定理 2

n を自然数．$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$, $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ とする．

このとき，$\dfrac{p_n}{q_n}$ は α の良い近似である．すなわち，

$$\frac{p'}{q'} \neq \frac{p_n}{q_n} \text{ かつ } q' \leq q_n \text{ ならば } \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\alpha - \frac{p'}{q'}\right|$$

が成り立つ．

注意：連分数近似には現れない良い近似もある．例えば，$\sqrt{2}$ の良い近似を分母が小さい順に挙げると

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{24}{17},\ \frac{41}{29}, \ldots$$

となるが，$\dfrac{4}{3}$ は連分数近似には現れない．

連分数展開は良い近似である

定理 2

n **を自然数**. $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$, $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ **とする**.
このとき, $\dfrac{p_n}{q_n}$ **は** α **の良い近似である**. **すなわち**,

$$\frac{p'}{q'} \neq \frac{p_n}{q_n} \text{ かつ } q' \leq q_n \text{ ならば } \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\alpha - \frac{p'}{q'}\right|$$

が成り立つ.

注意：$\dfrac{4}{3}$ **は先ほどの定理** 1 **の逆が成り立たない例にもなっている**

$$\left|\sqrt{2} - \frac{4}{3}\right| \fallingdotseq \frac{0.72}{3^2} < \frac{1}{3^2}$$

まとめ

- **素朴な方法による無理数の有理数近似**

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$$

- **連分数展開による無理数の有理数近似：** $\alpha \sim [a_0, a_1, \ldots]$

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n], \quad \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{10}{q_n^2} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

- **連分数近似は良い近似である**.

参考文献

A. Y. Khinchin, *Continued Fractions*, Dover Publications, 1997