分枝過程の絶滅問題

塩沢 裕一
大阪大学大学院理学研究科数学専攻

高校生のための公開講座
大阪大学理学部数学科

2019年8月8日

1. 序

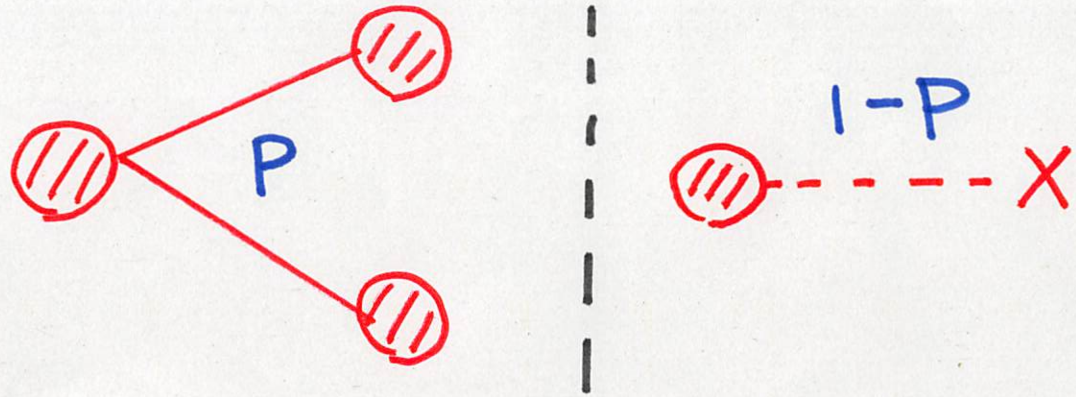
分枝過程とは

（生物などの）個体数の変動を理想化（単純化）した確率モデル

▷ p: $0 \leqq p \leqq 1$ を満たす数（確率を表す）

各世代の個体たちは以下の規則で（独立に）同時に分裂：

- 確率 p で 2 個に分裂
- 確率 $1-p$ で消滅



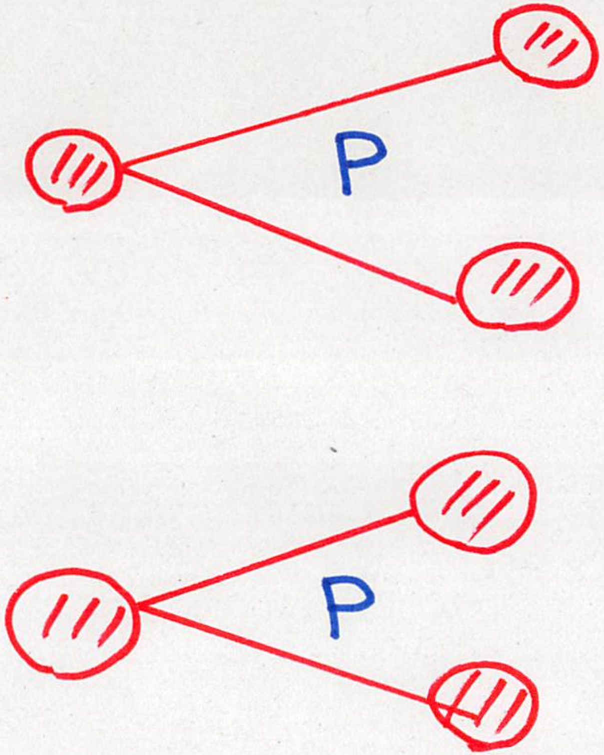
例題 1.

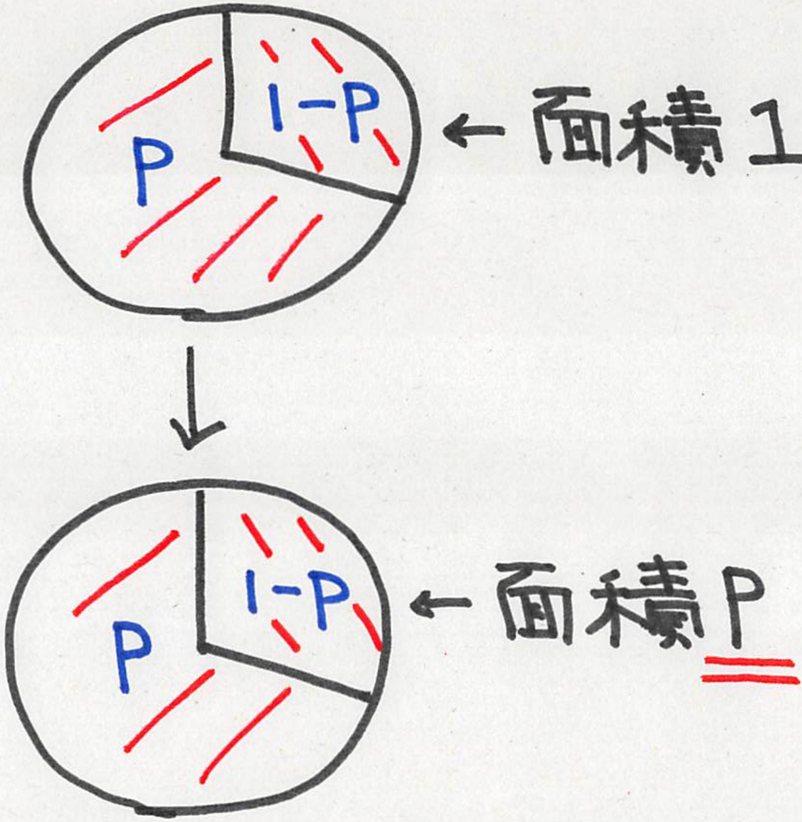
(1) 2 個体が同時に分裂したとき，4 個体になる確率は？

(2) 2 個体が同時に分裂したとき，0 個体になる確率は？

(3) 2 個体が同時に分裂したとき，2 個体になる確率は？

(1) 2 個体が同時に分裂したとき，4 個体になる確率は？

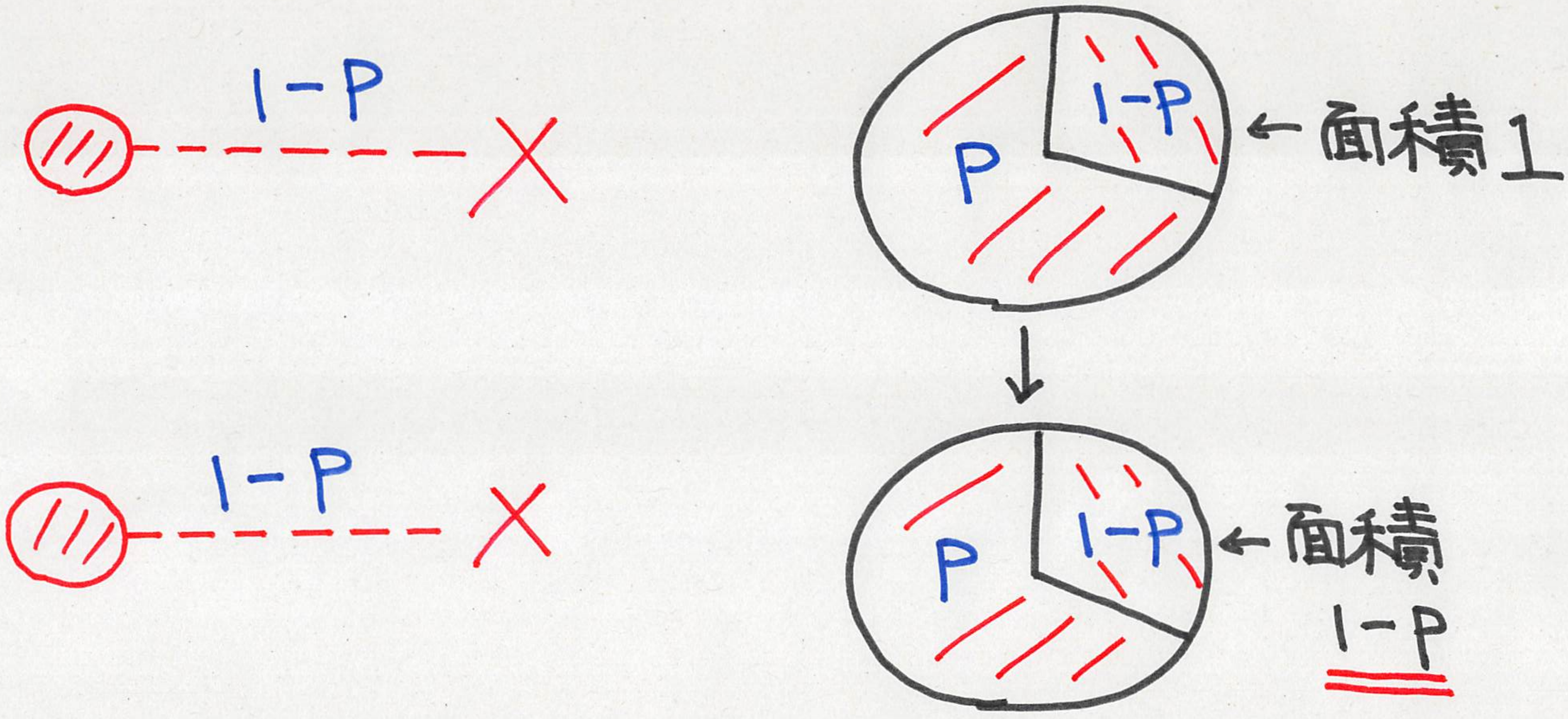




解答. 各個体が 2 個に分裂するときなので，求める確率は

$$p \times p = p^2$$

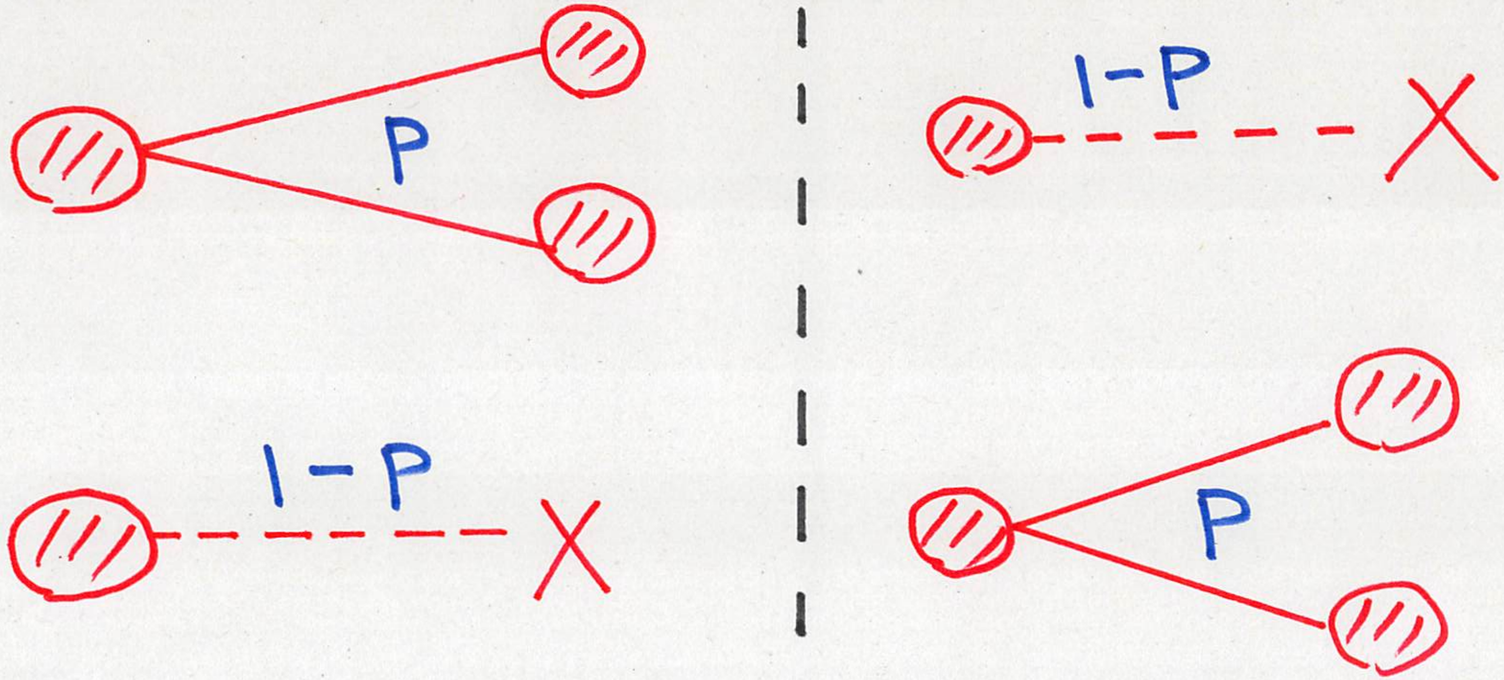
(2) 2 個体が同時に分裂したとき，0 個体になる確率は？



解答. 各個体が消滅するときなので，求める確率は

$$\mathbf{(1-p)\times(1-p)=(1-p)^2}$$

(3) 2 個体が同時に分裂したとき，2 個体になる確率は？

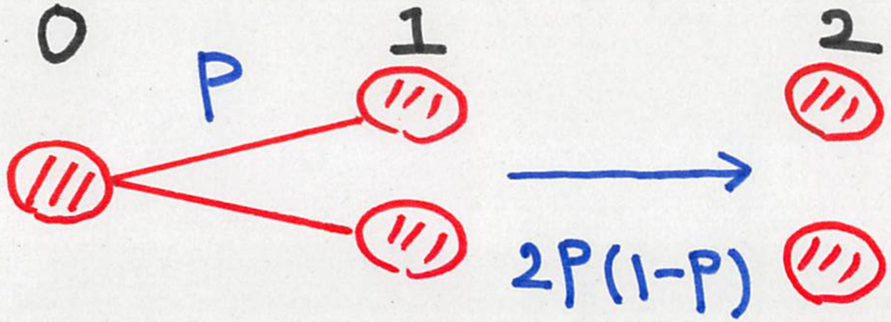


解答. 1 個体は 2 個に分裂し，他方の個体は消滅するときなので，求める確率は

$$\boldsymbol{p \times (1-p) + (1-p) \times p = 2p(1-p)}$$

例題 2.

▷ 第 0 世代には 1 個体
第 2 世代でちょうど 2 個体存在する確率は？



解答.

○ 第 0 世代 $\Rightarrow$ 第 1 世代：1 個体は 2 個に分裂

○ 第 1 世代 $\Rightarrow$ 第 2 世代：2 個体が 2 個になる（例題 1）

よって求める確率は

$$p \times 2p(1-p) = 2p^2(1-p)$$

分枝過程の絶滅問題

個体群は必ずいつか消滅するか？

それともいつまでも存在する可能性があるか？

分裂の規則

▷ $\boldsymbol{p}$: $\mathbf{0} \leqq \boldsymbol{p} \leqq \mathbf{1}$ を満たす実数

- 確率 $\boldsymbol{p}$ で 2 個に分裂／確率 $\mathbf{1}-\boldsymbol{p}$ で消滅

$$\boxed{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}) = \text{個体群がいつか消滅する確率}}$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{g}(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$$

∘ $\boldsymbol{p = 0}$ のとき

- 確率 $\mathbf{0}$ $(= \boldsymbol{p})$ で 2 個に分裂
- 確率 $\mathbf{1}$ $(= \mathbf{1} - \boldsymbol{p})$ で消滅 $\Rightarrow$ 必ず個体は第 $\mathbf{1}$ 世代で消滅

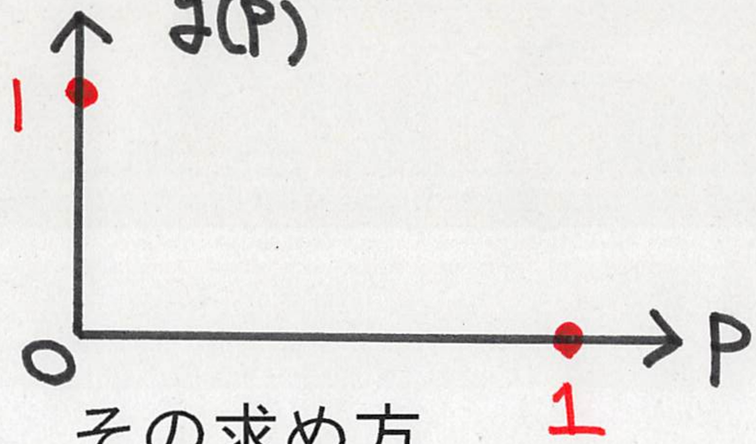
よって $\boldsymbol{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$

∘ $\boldsymbol{p = 1}$ のとき

- 確率 $\mathbf{1}$ $(= \boldsymbol{p})$ で 2 個に分裂 $\Rightarrow$ 必ず個体数は増える
- 確率 $\mathbf{0}$ $(= \mathbf{1} - \boldsymbol{p})$ で消滅

よって $\boldsymbol{g}(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$

<u>目標</u>. $g(p)$ を求めたい（$g(p)$ のグラフを描きたい）



○ p の値が大 $\Rightarrow$ $g(p)$ の値は小

本講座で紹介すること（その 1）

(1) $g(p)$ が具体的に求まることと，その求め方

(2) 分裂法則がより一般の場合にも

「個体群は必ずいつか消滅するか否か」

を明らかにできること

分枝過程に関する歴史

分枝過程はGalton-Watson 過程とも呼ばれる

- De Candolle (1806-1893)：1873 年に以下を指摘：
  - ▷ 家系数が徐々に減少
  - ▷ この割合は計算可能であるはず
  - ▷ この割合が不明 ⇒ 出生率低下を示唆するのか決定不可
- Francis Galton (1822-1911) [http://galton.org/]

  De Candolle の指摘に興味を持ち，問題を数学的に定式化

∗ F. Galton, Problem 4001, Educational Times (1873)

互いに異なる名字を持つ成人男子 N 人

各世代における人口増加の法則

- $a_{\underline{0}}$ % で成人に達する子どもを持たない (= $\underline{0}$人持つ)
- $a_{\underline{n}}$ % で成人に達する子どもを $\underline{n}$ 人持つ ($1 \leqq n \leqq 5$)

問題

(1) r 世代後に消滅する家系の割合は？

(2) 第 r 世代において，k 人いる家系の割合は？

∘ Reverend Henry William Watson (1827–1903)

∗ H. W. Watson, Solution to Problem 4001, Educational Times (1873) ：「どの家系も必ずいつか消滅する」と間違った結論

▷ Galton-Watson の試みはしばらく忘れ去られる

▷ 同じ問題を独立に再発見 (Fisher (1922), Erlang (1929))

∗ J. F. Steffensen, Matem. Tiddskr. B (1930)：正しい結論

∘ Irénée-Jules Bienaymé (1796–1878)

Galton-Watson の試み以前に，消滅確率に関する定理を主張

2. 消滅確率

分裂の法則

○ 第 $\mathbf{0}$ 世代では $\mathbf{1}$ 個体いると仮定

▷ $\boldsymbol{p}$: $\mathbf{0} \leqq \boldsymbol{p} \leqq \mathbf{1}$ を満たす実数

- 確率 $\boldsymbol{p}$ で 2 個に分裂/確率 $\mathbf{1}-\boldsymbol{p}$ で消滅

$\boxed{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}) = \text{個体群がいつか消滅する確率（消滅確率）}}$

目標　$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p})$ を具体的に求める

消滅確率の特徴づけ

▷ $q = g(p)$: 個体群がいつか消滅する確率

▷ $q_n = q_n(p)$: 個体群が第 n 世代までに消滅する確率

このとき次が分かる：

- $q_1 = 1 - p$

  （第 0 世代の個体が子どもを残さないとき）

- $q_1 \leqq q_2 \leqq q_3 \leqq \cdots$

  （個体群が消滅すると，以後決して復活しない）

さらに次が分かる：

- $q = \lim_{n\to\infty} q_n$ ($\{q_n\}$ の単調性と有界性から極限が存在)
  （n を限りなく大きくする（⇔ 消滅する世代に上限なし））
- $\boxed{q_{n+1} = 1 - p + p(q_n)^2}$ （数列 $\{q_n\}$ に対する漸化式）

数列の極限（数学 III）

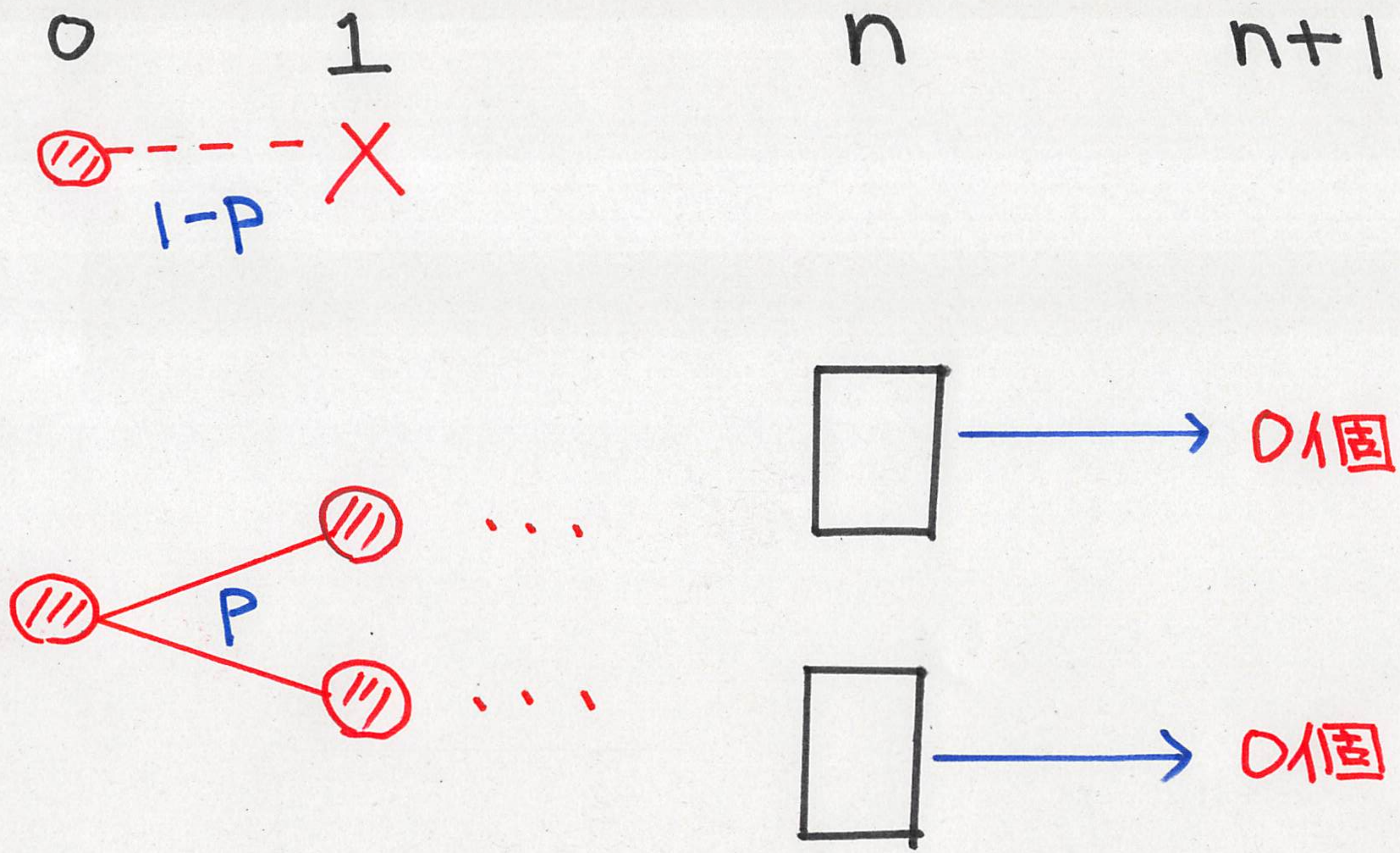
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{3n^2+1} = \frac{1}{3}$$

漸化式（数学 B）

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \Rightarrow a_n = 2^n - 1$$

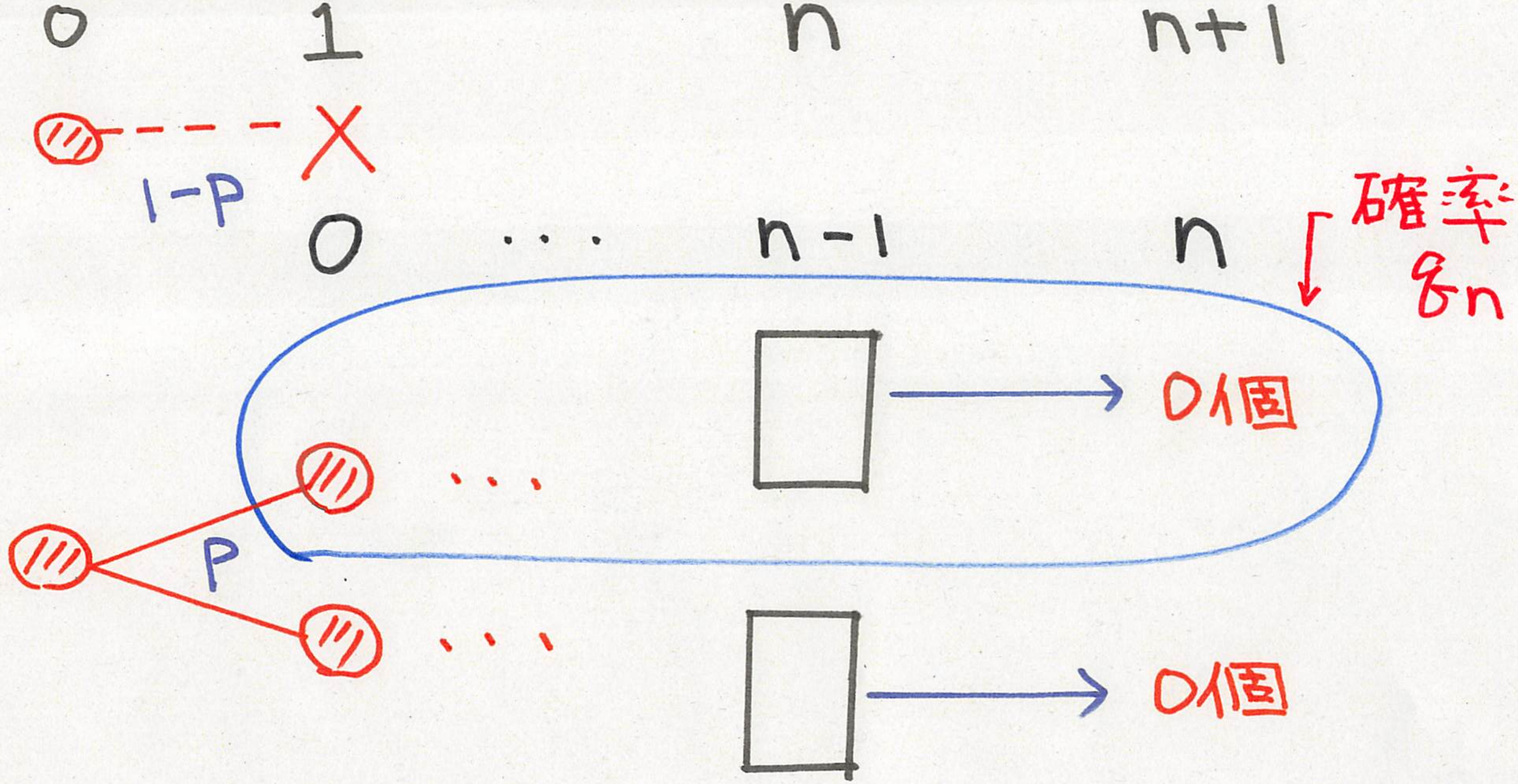
漸化式の導出

- $q_{n+1} = \underline{1 - p} + \underline{p(q_n)^2}$



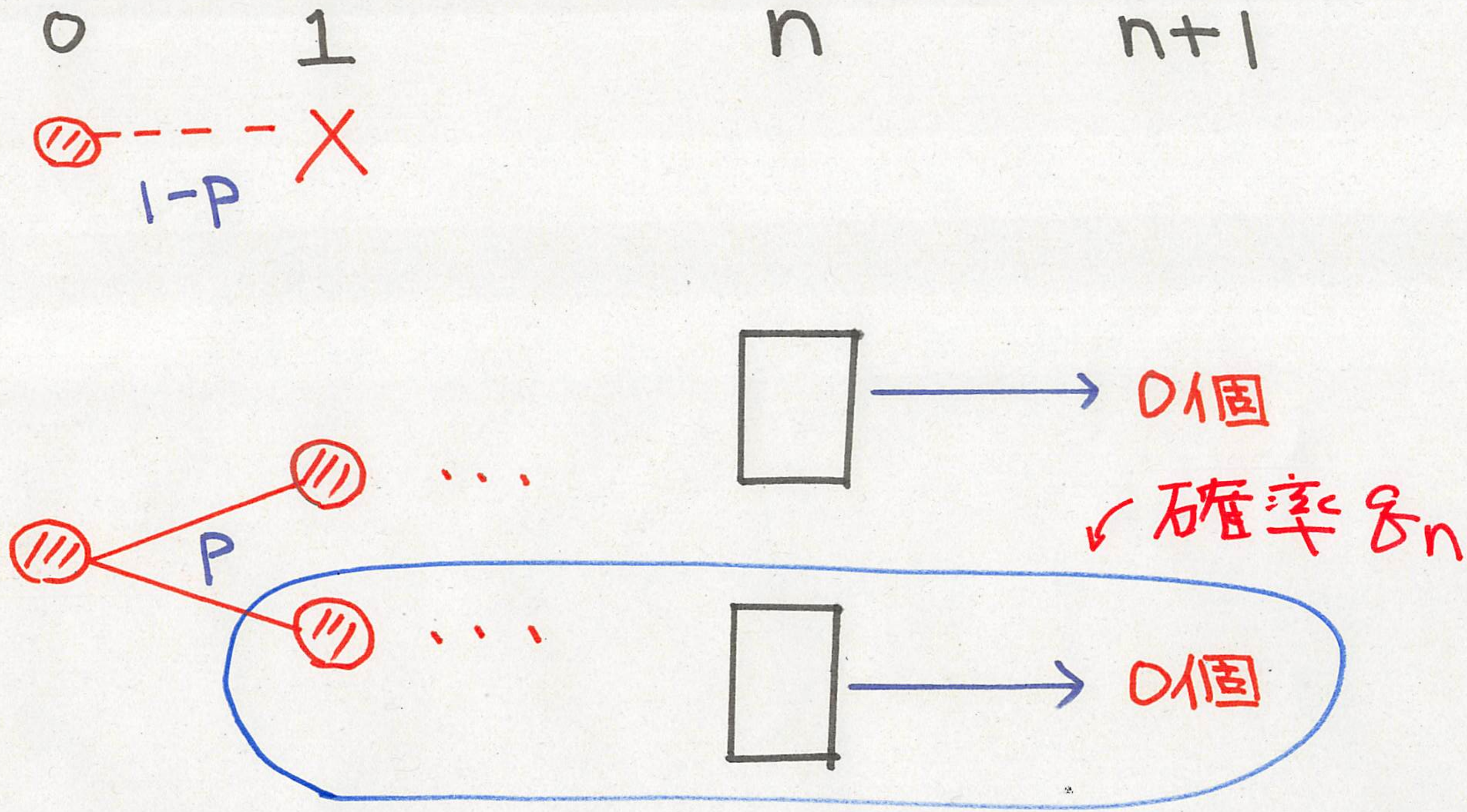
漸化式の導出

- $q_{n+1} = \underline{1-p} + \underline{p(q_n)^2}$



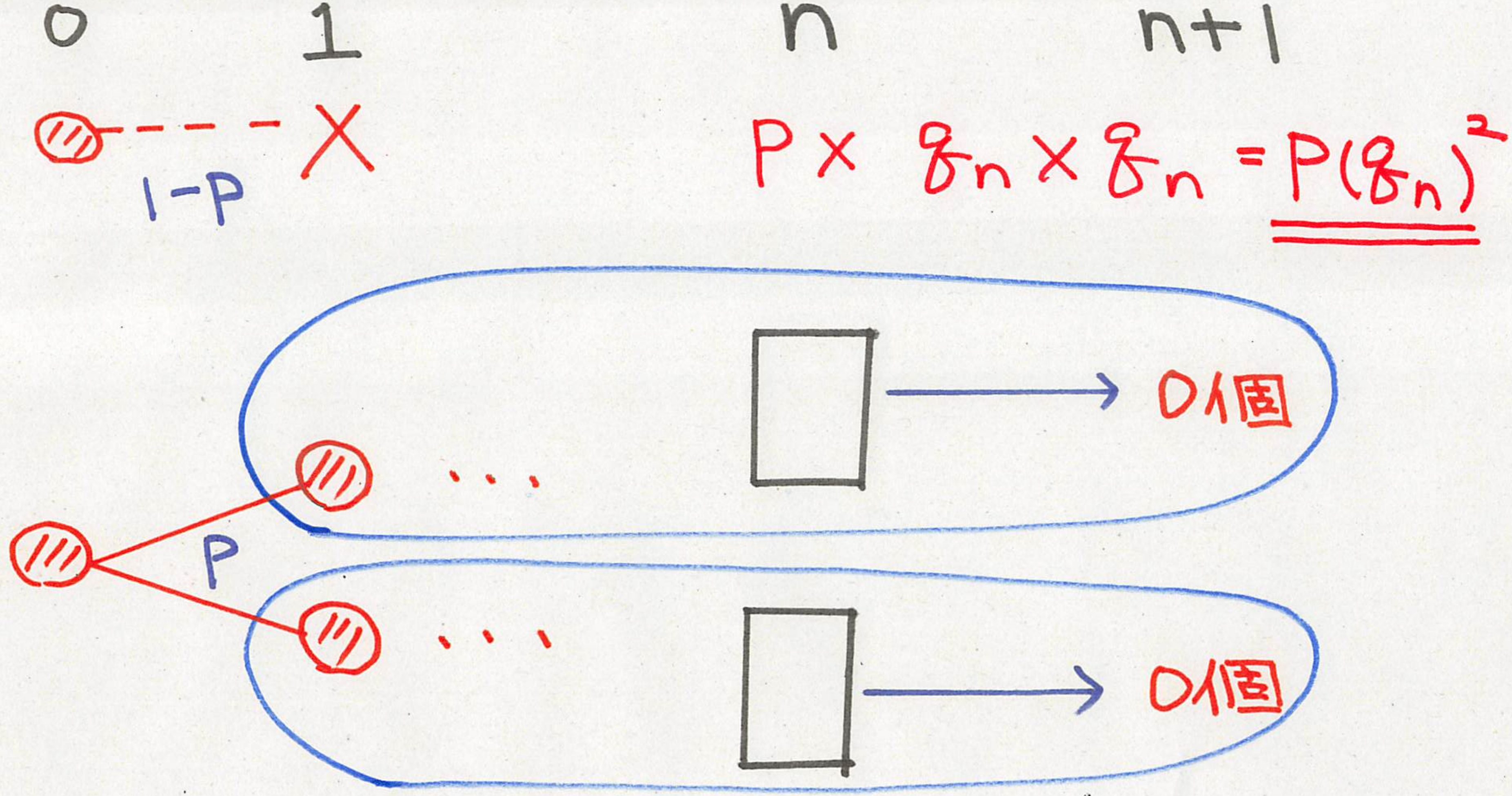
漸化式の導出

- $q_{n+1} = \underline{1-p} + \underline{p(q_n)^2}$



漸化式の導出

- $q_{n+1} = \underline{1-p} + \underline{p(q_n)^2}$



$$q_{n+1} = 1 - p + p(q_n)^2$$

n を限りなく大きくすると

$$\boxed{q = 1 - p + pq^2}$$

q について整理して

$$pq^2 - q + 1 - p = 0$$

q を x に置き換えて

$$px^2 - x + 1 - p = 0$$ （2 次方程式）

消滅確率 q は次の 2 次方程式の解：

$$px^2 - x + 1 - p = 0 \qquad (1)$$

左辺を因数分解して

$$(x-1)(px+p-1) = 0$$

よって方程式 (1) の解は

$$\boxed{x = 1, \quad \frac{1-p}{p} \quad (p \neq 0 \text{ のとき})}$$

<u>注意.</u> 消滅確率 q は $0 \leqq q \leqq 1$ を満たす $\Rightarrow$ x の範囲を制限

$$px^2 - x + 1 - p = 0 \quad (\underline{0 \leqq x \leqq 1})$$

消滅確率

$$px^2 - x + 1 - p = 0 \quad \underline{(0 \leqq x \leqq 1)} \qquad (2)$$

- $x = 1$ は常に (2) の解

- $x = \dfrac{1-p}{p}$ は (2) の解 $\iff 0 \leqq \dfrac{1-p}{p} \leqq 1$

$$\iff \frac{1}{2} \leqq p \leqq 1$$

すなわち

○ $0 \leqq p \leqq \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ (2) の解は $x = 1$ のみ $\Rightarrow \underline{q = 1}$

○ $\dfrac{1}{2} < p \leqq 1 \Rightarrow$ (2) の解は $x = 1, \dfrac{1-p}{p} \Rightarrow \underline{q = ??}$

- 確率 p で 2 個に分裂

▷ $0 \leqq p < \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ 個体が消滅する確率の方が大きい

▷ $p = \dfrac{1}{2}$ でも消滅確率は 1

○ Watson：p の値に依らず $q = 1$ であると結論 $\Rightarrow$ 実際は

$$q = g(p) = \begin{cases} 1 & \left(0 \leqq p \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{1-p}{p} & \left(\dfrac{1}{2} < p \leqq 1\right) \end{cases}$$

▷ $p = \dfrac{1}{2}$ を境に q （のグラフ）が変わる（臨界性定理）

3. 消滅確率の決定

▷ $q_n = q_n(p)$: 個体群が第 n 世代までに消滅する確率

$$\boxed{q_1 = 1 - p, \quad q_{n+1} = 1 - p + p(q_n)^2}$$

○ 先ほどは $n \to \infty$ として q の満たす方程式を導出

$\Rightarrow$ q_n を評価する

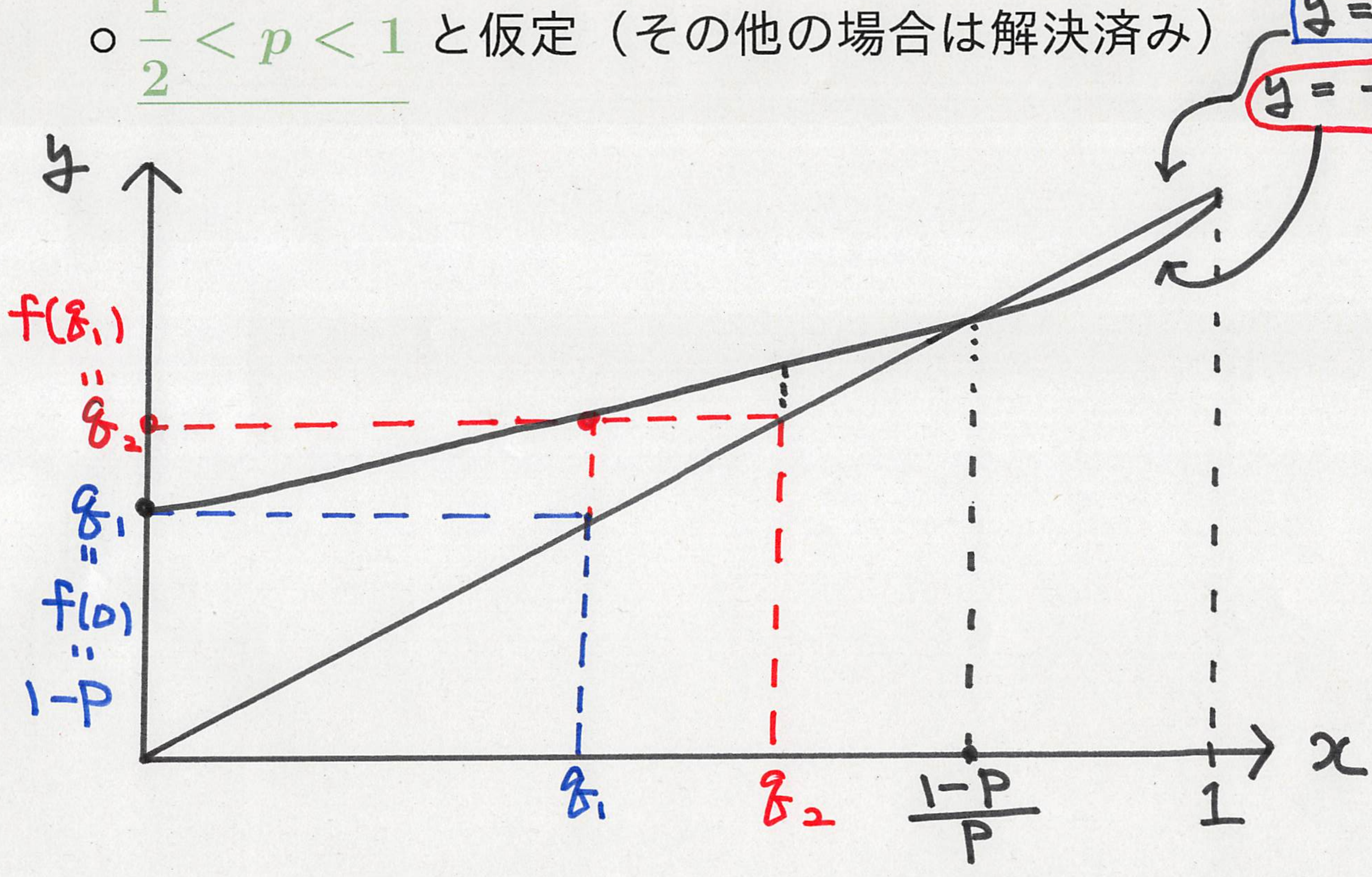
▷ $f(x) = 1 - p + px^2$

先ほどの漸化式を書き換えると

$$\boxed{q_1 = 1 - p, \quad q_{n+1} = f(q_n)}$$

グラフを用いた説明

○ $\dfrac{1}{2} < p < 1$ と仮定（その他の場合は解決済み）



証明

示したいこと

$$q_n \leqq \frac{1-p}{p} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

もしこの不等式を示せれば，n を限りなく大きくして

$$q = \lim_{n \to \infty} q_n \leqq \frac{1-p}{p} \, (< 1)$$

すでに次のことは知っている

$$\boxed{q = 1 \text{ または } q = \frac{1-p}{p}}$$

よって $q = \dfrac{1-p}{p}$ を得る

示したいこと

$$q_n \leqq \frac{1-p}{p} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

数学的帰納法（数学 B）

(1)「$n = 1$ での成立」を確認

$0 < p \leqq 1$ より

$$q_1 = 1 - p \leqq \frac{1-p}{p}$$

(2)「$1 \leqq n \leqq k$ で成立すれば, $n = k+1$ でも成立」を確認：

$$q_n \leqq \frac{1-p}{p} \quad (1 \leqq n \leqq k) \Longrightarrow q_{k+1} \leqq \frac{1-p}{p}$$

(2)「$1 \leqq n \leqq k$ で成立すれば，$n = k+1$ でも成立」を確認：

$$q_n \leqq \frac{1-p}{p} \quad (1 \leqq n \leqq k) \Longrightarrow q_{k+1} \leqq \frac{1-p}{p}$$

もし

$$q_n \leqq \frac{1-p}{p} \quad (1 \leqq n \leqq k)$$

ならば，$f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ は増加関数なので

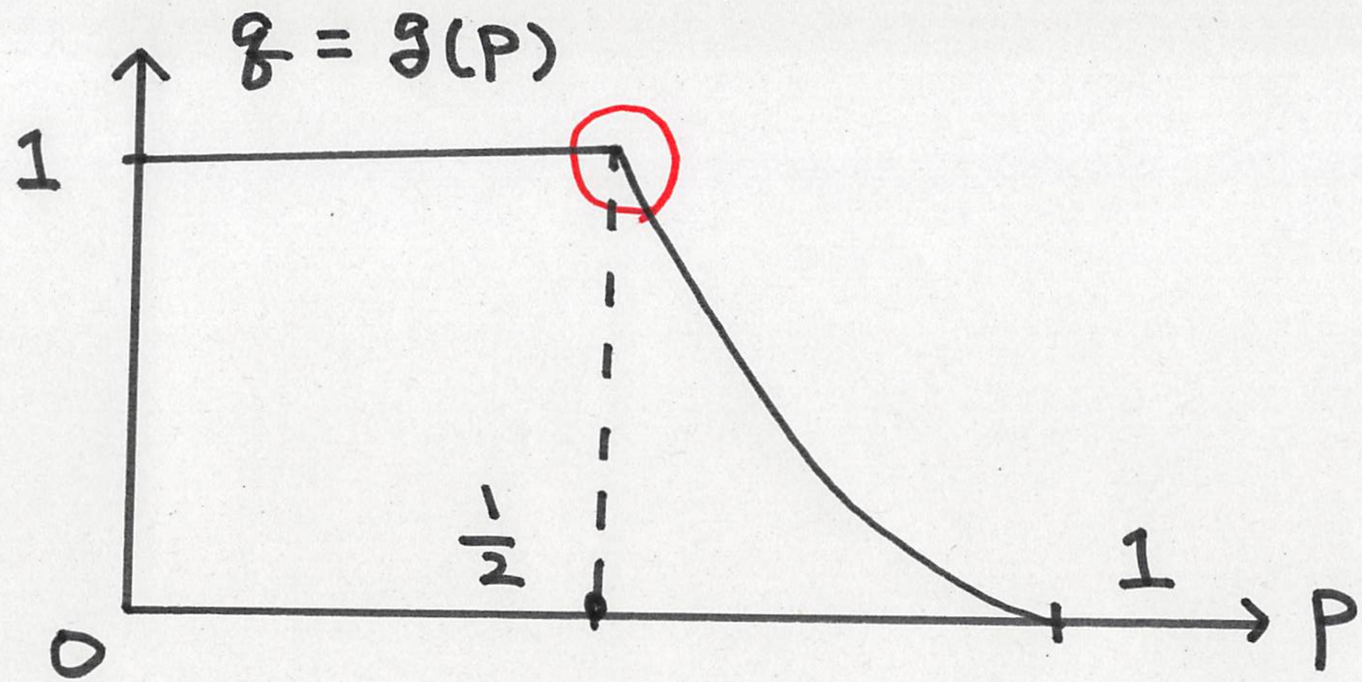
$$q_{k+1} = \underline{f(q_k) \leqq f\left(\frac{1-p}{p}\right)} \underline{= \frac{1-p}{p}}$$

$$\underline{f(x)} = x \ (0 \leqq x \leqq 1) \iff \underline{px^2} - x + \underline{1-p} = 0 \quad (2)$$

$$\iff x = 1, \ \frac{1-p}{p}$$

以上で数学的帰納法が完成して消滅確率が求まった：

$$q = \begin{cases} 1 & \left(0 \leqq p \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{1-p}{p} & \left(\dfrac{1}{2} < p \leqq 1\right) \end{cases}$$



分裂の法則（一般化）

○ 第 0 世代では 1 個体いると仮定

▷ $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$: 次の等式を満たす数列

$$0 \leqq p_n \leqq 1 \ (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

○ $\underline{\infty}$ は n の取る値に上限がないことを表す

● 確率 p_n で n 個に分裂/確率 p_0 で消滅

最初の例では

$$p_0 = 1 - p, \ p_2 = p, \ p_n = 0 \ (n = 1, 3, 4, 5, \cdots)$$

▷ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ （今までは $1 - p + px^2 = p_0 + p_2 x^2$）

以後 $p_0 + p_1 < 1$ を仮定（個体数の増減あり）

▷ $q =$ 個体群がいつか消滅する確率（消滅確率）

▷ $m = \sum_{n=0}^{\infty} np_n$: 1 回の分裂で生まれる平均個体数（期待値）

定理. 消滅確率 q は次の方程式の最小解：

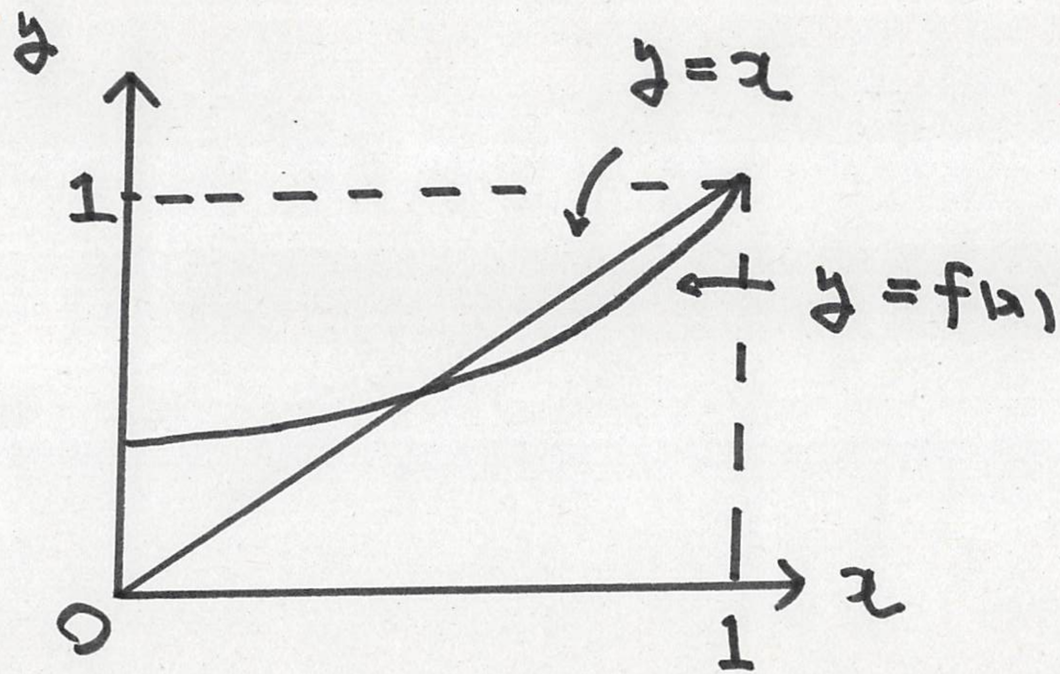
$$f(x) = x \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

特に

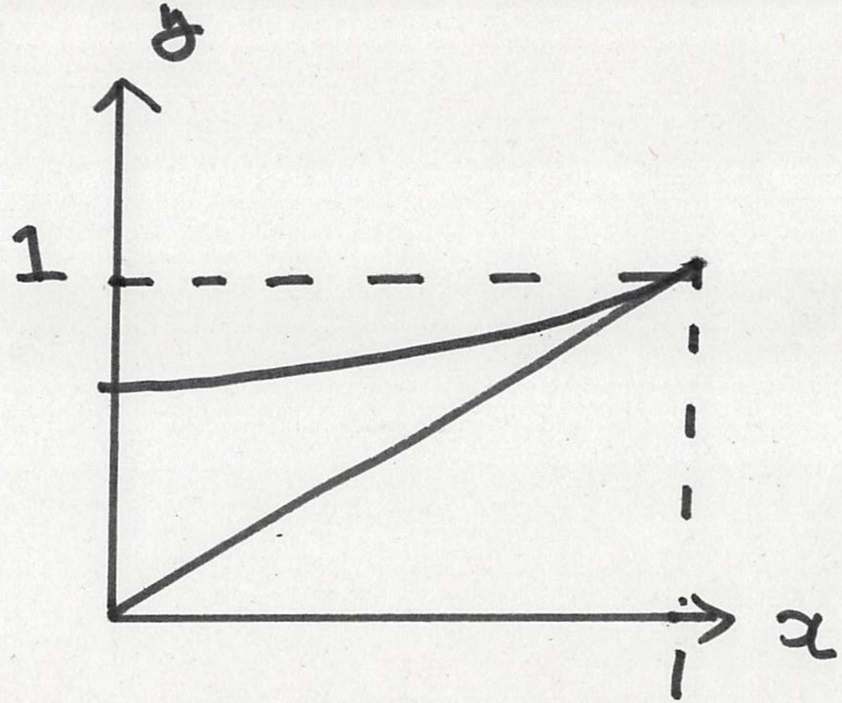
$$\boxed{q = 1 \iff m \leq 1}$$

グラフを用いた説明

$m = f'(1)$: $y = f(x)$ のグラフの $x = 1$ での傾き



$m = f'(1) > 1$



$m = f'(1) \leqq 1$

例題.

▷ $\boldsymbol{0 < p < 1}$

▷ $\boldsymbol{p_0 = 1 - p,\ p_3 = p,\ p_n = 0}$ (その他の $\boldsymbol{n}$)

(1) 関数

$$\boldsymbol{f(x) = px^3 + 1 - p\ (0 \leqq x \leqq 1)}$$

のグラフを図示せよ。

(2) 消滅確率を求めよ。

3. 個体数の増大度と Yaglom 極限

▷ $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$: 次の等式を満たす数列

$$0 \leqq p_n \leqq 1\ (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

$p_0 + p_1 < 1$ を仮定（個体数の増減あり）

$$\boxed{m = \sum_{n=0}^{\infty} np_n > 1 \Rightarrow q < 1 \text{（正の確率で家系が永続）}}$$

本講座で紹介すること（その２）

(1) 家系が永続するとき，第 n 世代での個体数はどの程度？

(2) 家系が消滅するとき，第 n 世代での個体数はどの程度？

個体数の極限分布

▷ Z_n: 第 n 世代の個体数

▷ $P(Z_n = k)$: 第 n 世代に k 個体いる確率 (probability)

定理. 各自然数 k に対して

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n = k) = 0$$

さらに次が成立：

$$P\left(\lim_{n\to\infty} Z_n = 0\right) = 1 - P\left(\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty\right) = q$$

- 個体数は限りなく増加するか, すべて消滅するかのいずれか

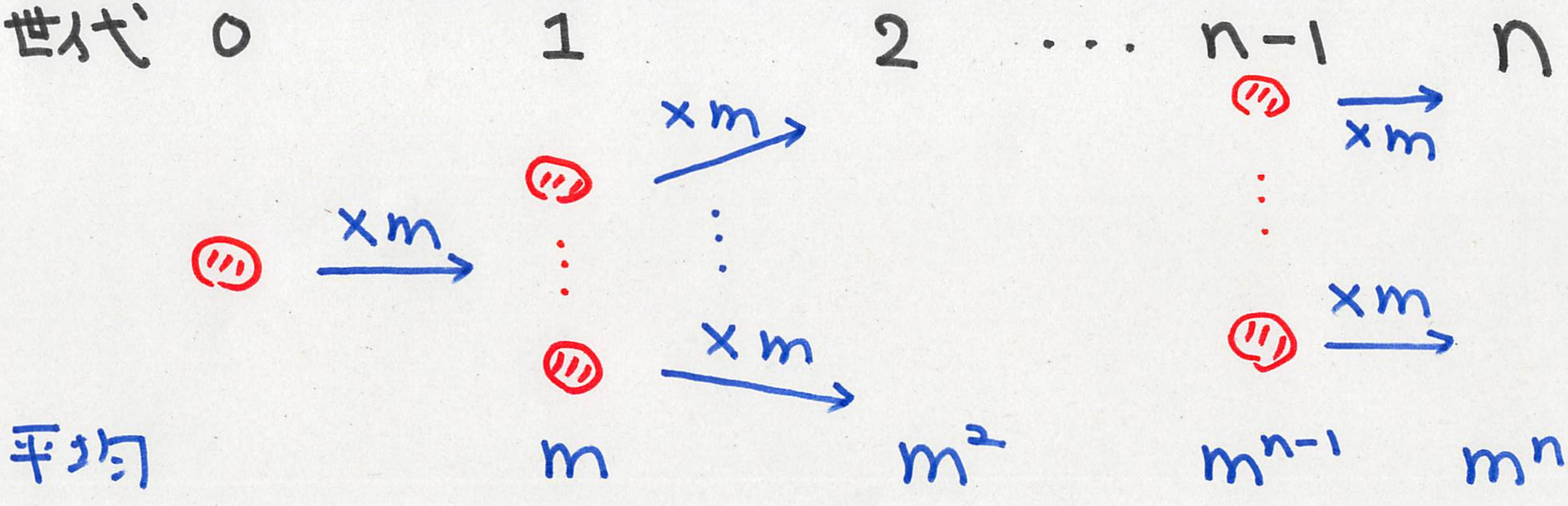
個体数の増大度

○ 以後 $m < \infty$ と仮定

▷ Z_n: 第 n 世代の個体数

▷ $E[Z_n] = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} kP(Z_n = k)$: 第 n 世代の平均個体数

命題. 等式 $E[Z_n] = m^n$ が成立する。



▷ $W_n := m^{-n} Z_n$ ($\Rightarrow E[W_n] = 1$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$))

▷ $E[Z_{n+1} \mid Z_n]$: 条件付き期待値

現在が第 n 世代であるときの，第 $n+1$ 世代の平均個体数

命題. 等式 $E[Z_{n+1} \mid Z_n] = mZ_n$ が成立して特に

$$\boxed{E[W_{n+1} \mid W_n] = W_n}$$

すなわち，$\{W_n\}$ は（非負）マルチンゲールである。

- マルチンゲールはアラビア語で馬具の「むながい」のこと
- マルチンゲールは公平な賭けのモデル

定理. $m > 1$ ($\iff$ P(家系が永続する) > 0) ならば

$$P\left(\lim_{n\to\infty} W_n > 0 \mid \text{家系が永続する}\right) = 1$$

▷ $W = \lim_{n\to\infty} W_n$

- 家系が永続するならば

$$\boxed{Z_n = Wm^n + o(m^n)\ (n \to \infty)}$$

- $r = P(W = 0)\,(< 1)$ も等式 $f(r) = r$ を満たす

  ($\Rightarrow q = r$ が従う)

- マルチンゲール性が $\lim_{n\to\infty} W_n$ の存在を保証

Yaglom 極限

○ $\mathbf{0} < \boldsymbol{m} < \mathbf{1}$ と仮定 $\Rightarrow$ 家系はいつか消滅

▷ $\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Z_n} = \underline{\boldsymbol{k}} \mid \underline{\boldsymbol{Z_n} \geqq \mathbf{1}}\right)$:

第 $\boldsymbol{n}$ 世代に個体が存在するとき，ちょうど $\boldsymbol{k}$ 個 いる確率

$$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z_n} \geqq \mathbf{1}) = \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} (\mathbf{1} - \underbrace{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z_n} = \mathbf{0})}_{=\boldsymbol{q_n}(\boldsymbol{p})}) = \mathbf{0}$$

- まれな状況下での個体数分布の解析

定理. 以下が成立：

(1) 各 $k \geq 1$ に対して次の極限が存在：

$$b_k = \lim_{n\to\infty} P(Z_n = k \mid Z_n > 0)$$

特に $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k = 1$ ($\Rightarrow$ $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ は確率を表す)

(2) 関数 $B(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$ は次の等式を満たす：

$$B(f(x)) = mB(x) + (1-m)$$

$\triangleright$ $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$

注意. (1) $\boldsymbol{m > 1}$ のとき，次の極限が存在：

$$\boldsymbol{b_k = \lim_{n\to\infty} P(Z_n = k \mid \text{第 } n \text{ 世代より後に消滅})}$$

特に $\boldsymbol{\{b_k\}_{k=1}^{\infty}}$ は確率を表す。

▷ $\boldsymbol{B(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k}$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow \ B\left(\frac{f(qx)}{q}\right) = f'(q)B(x) + (1 - f'(q))}$$

(2) $\boldsymbol{m = 1}$ のとき，次が成立：

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} P(Z_n = k \mid Z_n > 0) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)}$$

臨界的状況での極限分布

定理. $m = 1$ のとき，$c \geqq 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_n > cn \mid Z_n > 0\right) = e^{-2c/\sigma^2}$$

ただし

$$\sigma^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n$$

$$P\left(Z_n > cn \mid Z_n > 0\right) = \sum_{k>cn} \underbrace{P\left(Z_n = k \mid Z_n > 0\right)}_{\to 0\ (n\to\infty)}$$

生存確率

定理. 以下が成立：

(1) $m < 1 \Rightarrow P(Z_n > 0) \simeq m^n$

(2) $m > 1 \Rightarrow P($第 n 世代より後に消滅$) \simeq f'(q)^n$

(3) $m = 1$ かつ $f''(1) < \infty \Rightarrow P(Z_n > 0) \sim \dfrac{2}{nf''(1)}$

例. $p_0 = 1 - p,\ p_2 = p\ (\Rightarrow m = 2p,\ f'(x) = 2px)$

- $p < \dfrac{1}{2} \Rightarrow P($第 n 世代より後に消滅$) \simeq (2p)^n$
- $p > \dfrac{1}{2} \Rightarrow P($第 n 世代より後に消滅$) \simeq \{2(1-p)\}^n$

参考文献

(1) A. コルモゴロフ, A. プロホロフ, I. ジュルベンコ 著,
丸山 哲郎, 馬場 良和 訳,
コルモゴロフの確率論入門，森北出版，2003.

(2) D. G. Kendall, Branching processes since 1873,
J. London. Math. Soc. **41** (1966), 385–406.

(3) D. G. Kendall, The genealogy of genealogy:
branching processes before (and after) 1873,
Bull. London. Math. Soc. **7** (1975), 225–253.

(4) K. B. Athreya and P. E. Ney, Branching Processes, Springer, New York, 1972.

(5) T. E. Harris, The Theory of Branching Processes, Springer, Berlin, 1963.

(6) K. B. Athreya and P. E. Ney, T. E. Harris and branching processes, Ann. Probab. **39** (2011), 429–434.