ひねって
ひろがる
曲面の数学

久野恵理香（大阪大学）

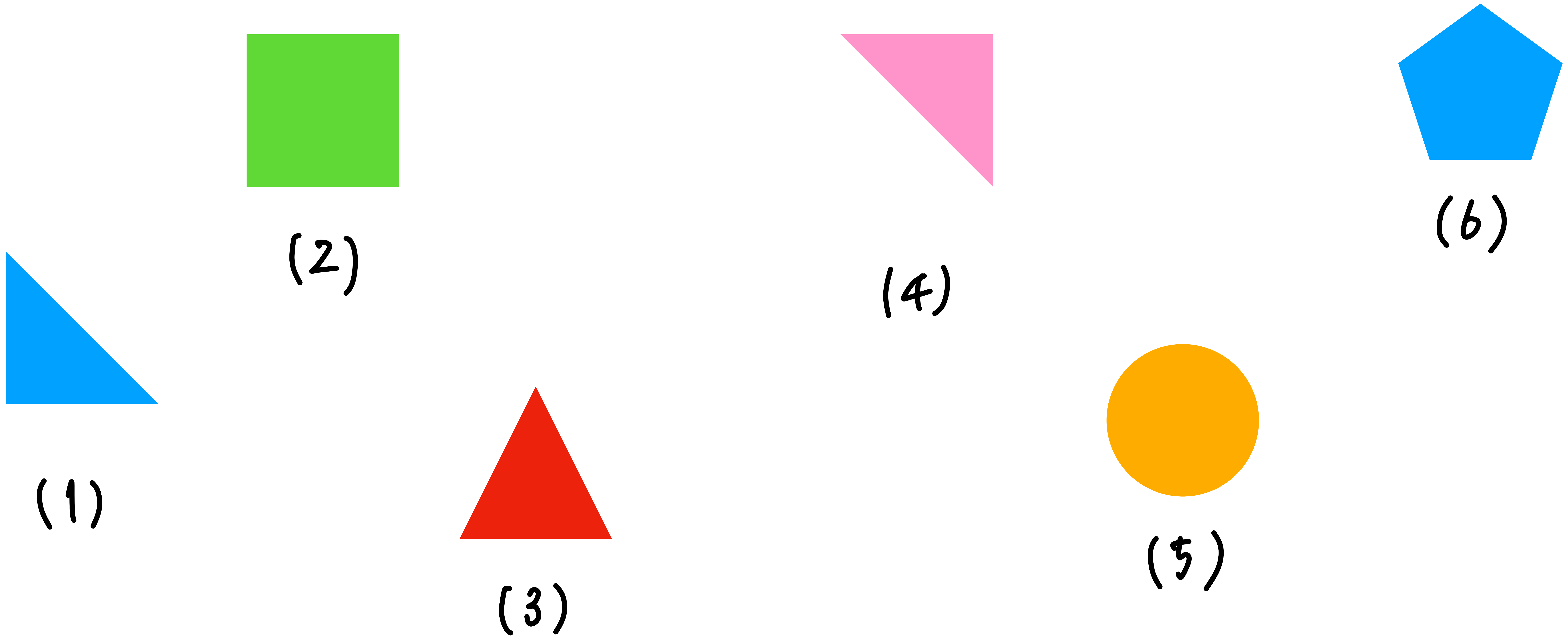
2022年11月5日
高校生のための公開講座

目次

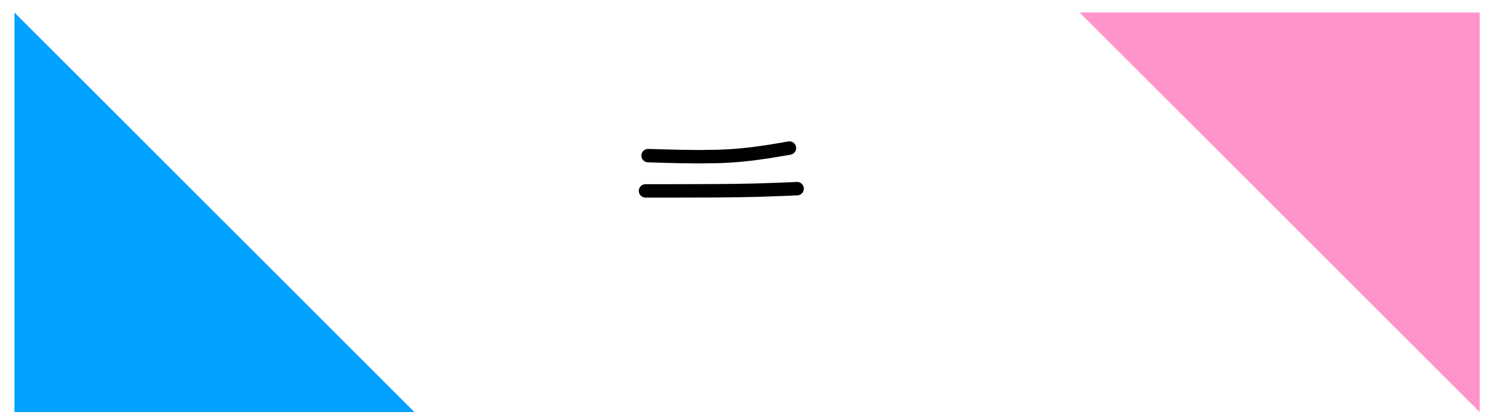
1. 位相幾何学における「同じ」とは？

問題

次の図形で同じものはどれか？



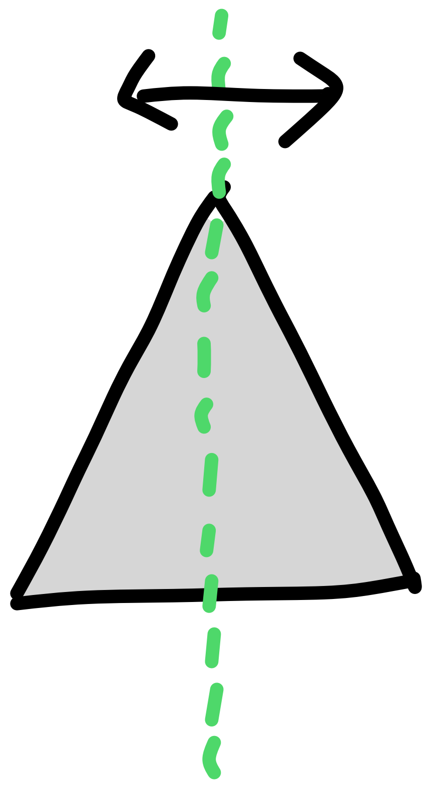
答え1（ユークリッド幾何の視点）

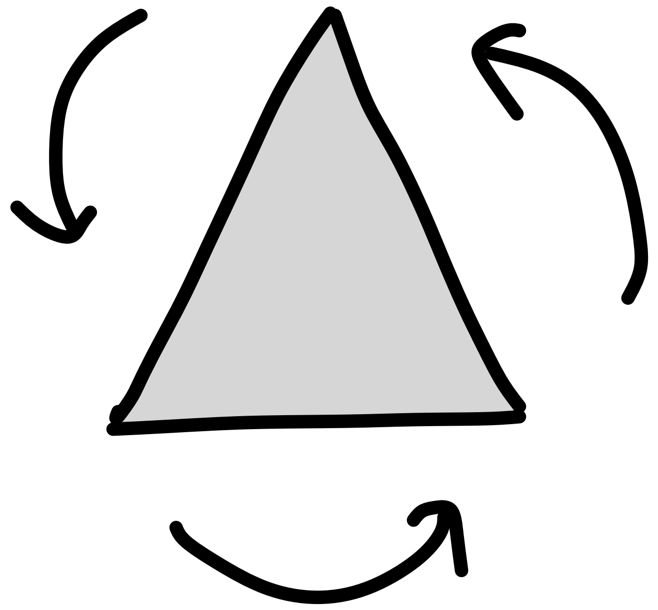


(1)　(4)

長さを変えない変形で同じ（合同）と見なす.

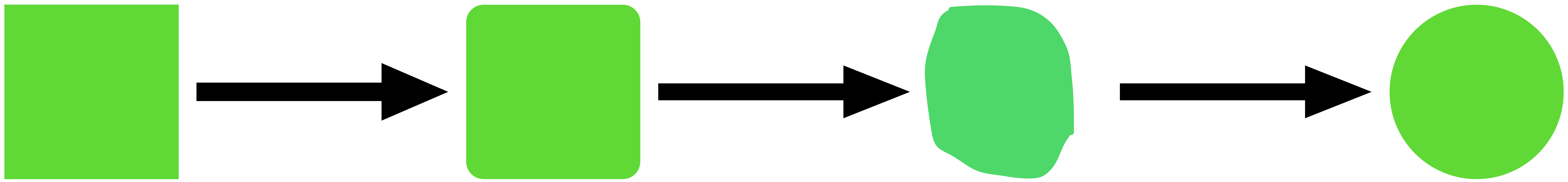
- 平行移動
- 対称移動
- 回転





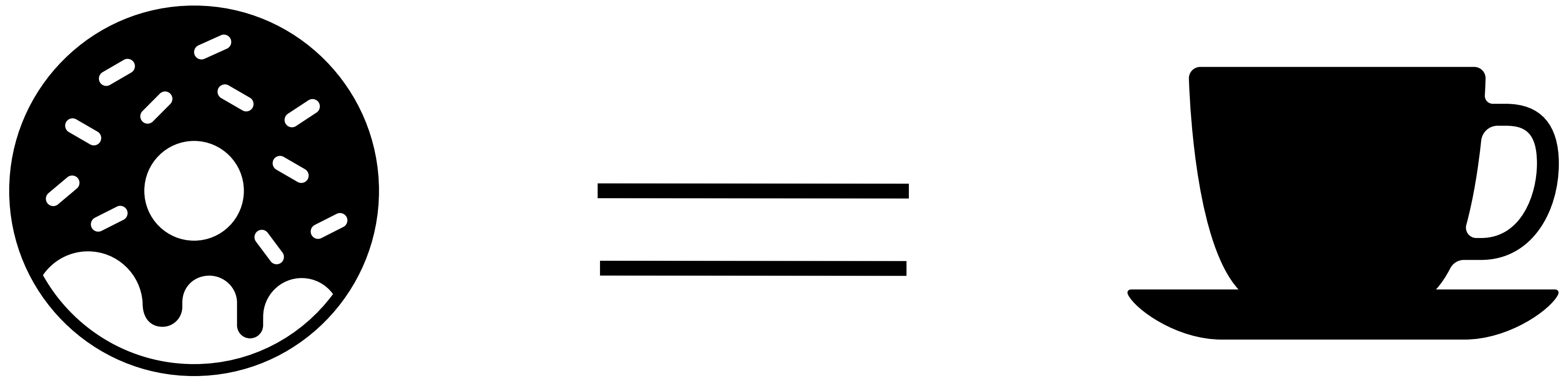
答え2（位相幾何学：トポロジーの視点）

位相幾何学においては，(1)～(6)はすべて同じ図形！



連続に（切ったり穴をあけずに）

変形できたら同じ（同相，位相同形）とする．



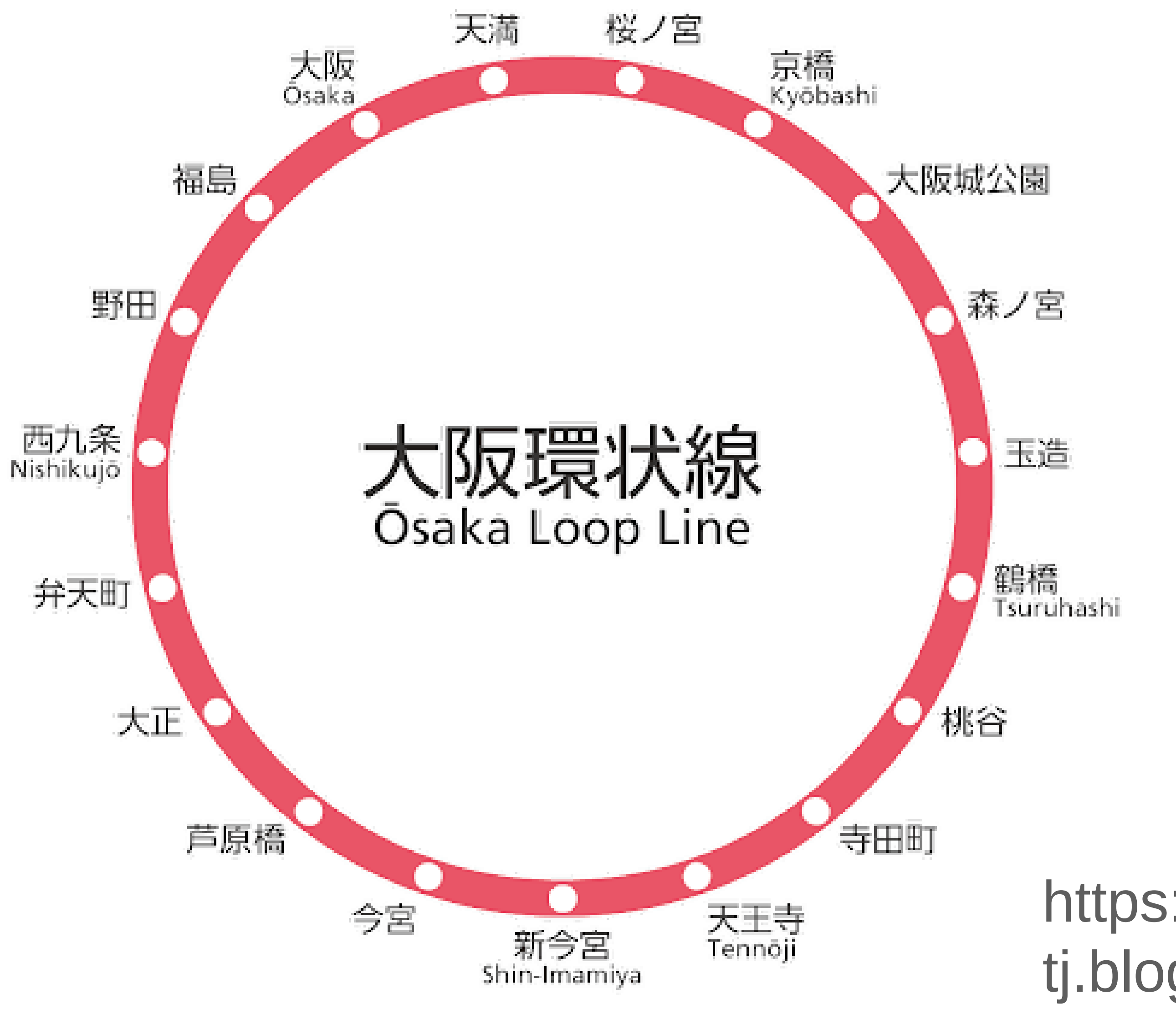
トポロジー = Topology = 位置の学問

Topo: 位置　logy: 学問

⇝ もののつながり方を知りたい！

（長さ，距離，面積の情報は"忘れる"）

例（路線図）



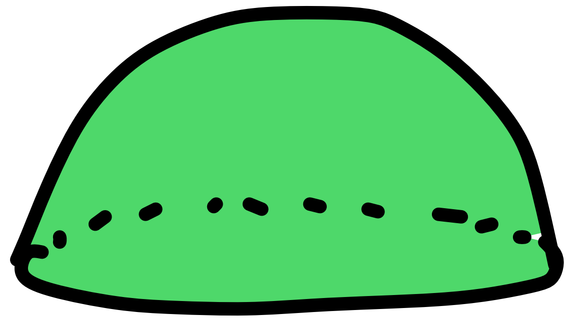
https://rp-tj.blogspot.com/2021/09/osakaloopline-map.html

例（メルカトル図法地図）

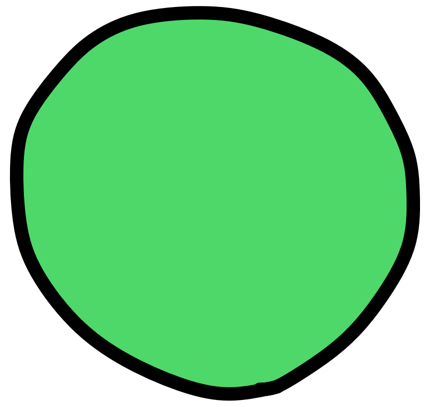
https://www.irasutoya.com/2013/02/blog-post_8574.html

練習

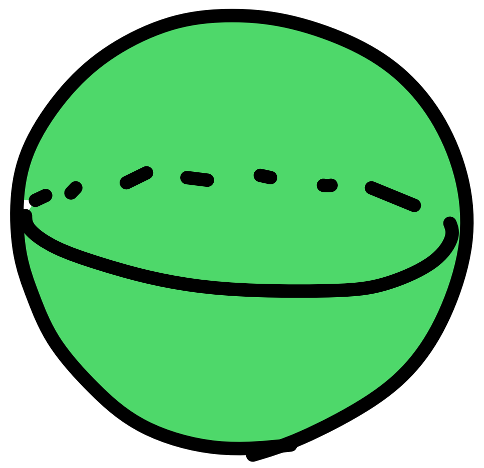
(1) 以下の図形で同相なものはどれか？



(a) 半球

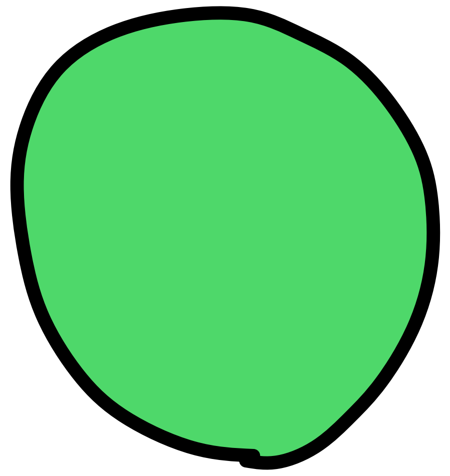


(b) 円板

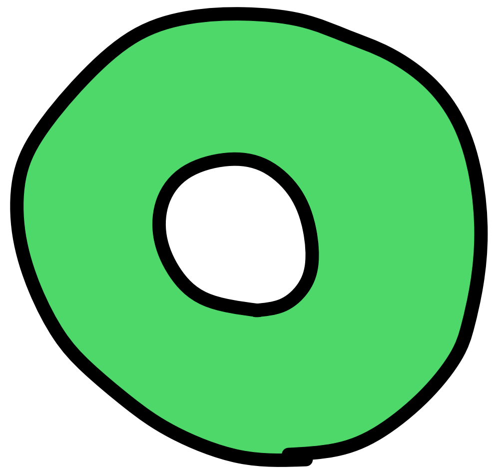


(c) 球面

(2) 以下の図形で同相なものはどれか？

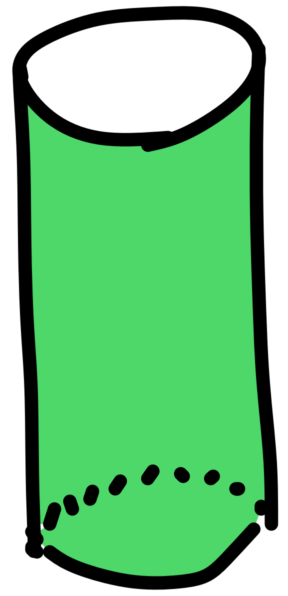


(a)



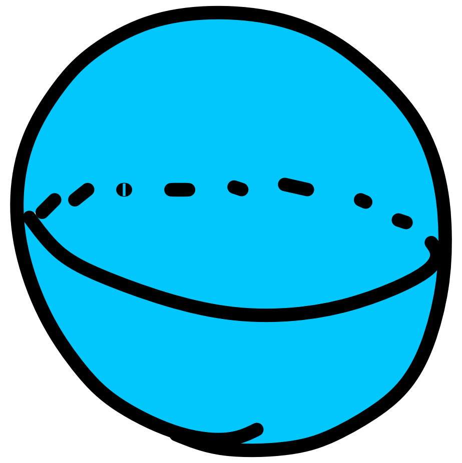
(b)

(c)

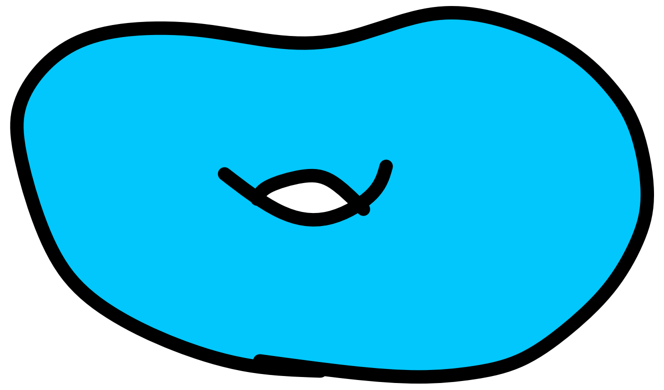


(d)

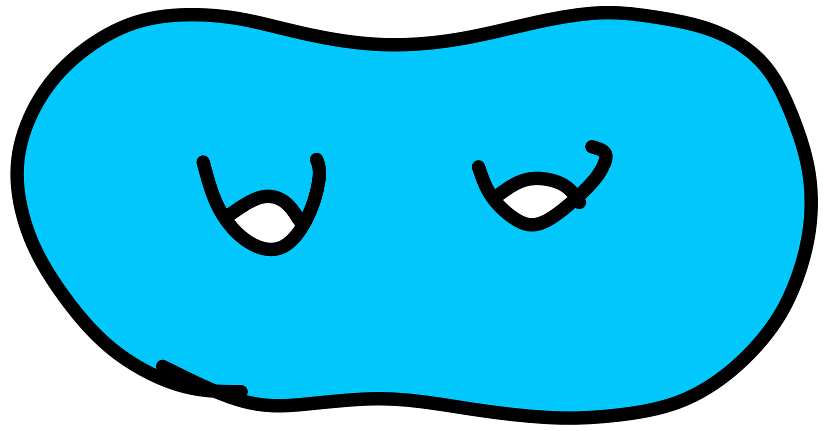
(3) 以下の図形で同相なものはどれか?



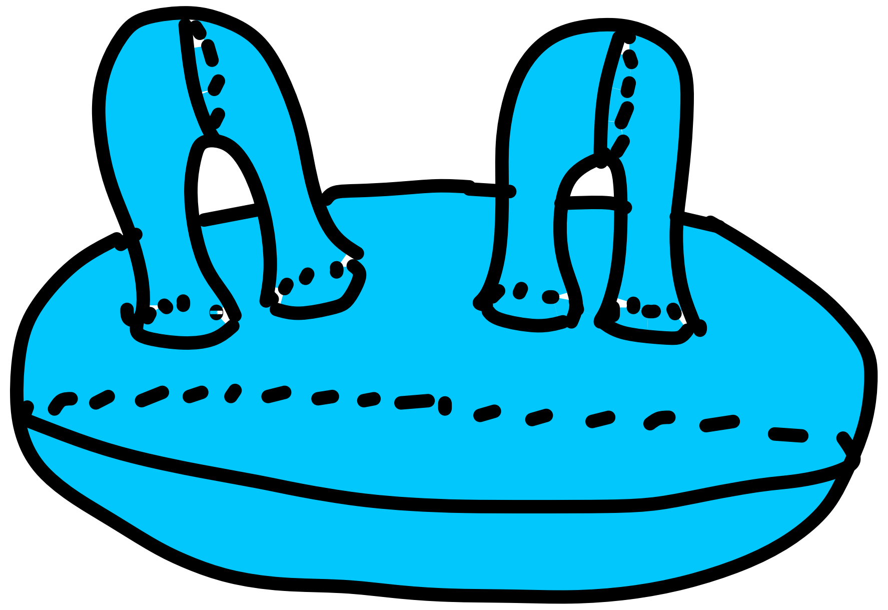
(a) 球面



(b) うきわ



(c) 2人乗りうきわ
‖
種数2という.



(d)

※ 一般には2つの図形が同相であるかどうか判定するのは難しい.

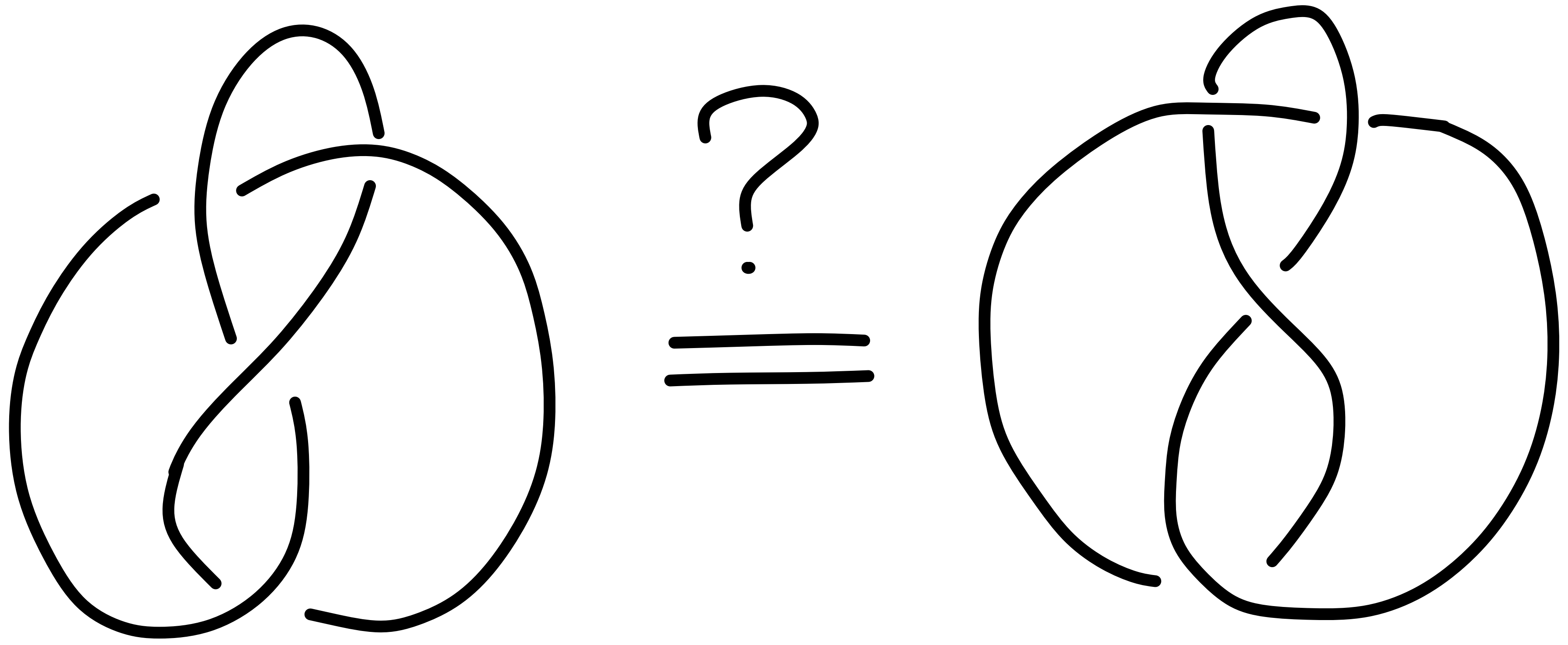
同相である(または同相でない)ことを判断するための

さまざまな"計算"がある(オイラー標数, 基本群, ホモロジー群など).

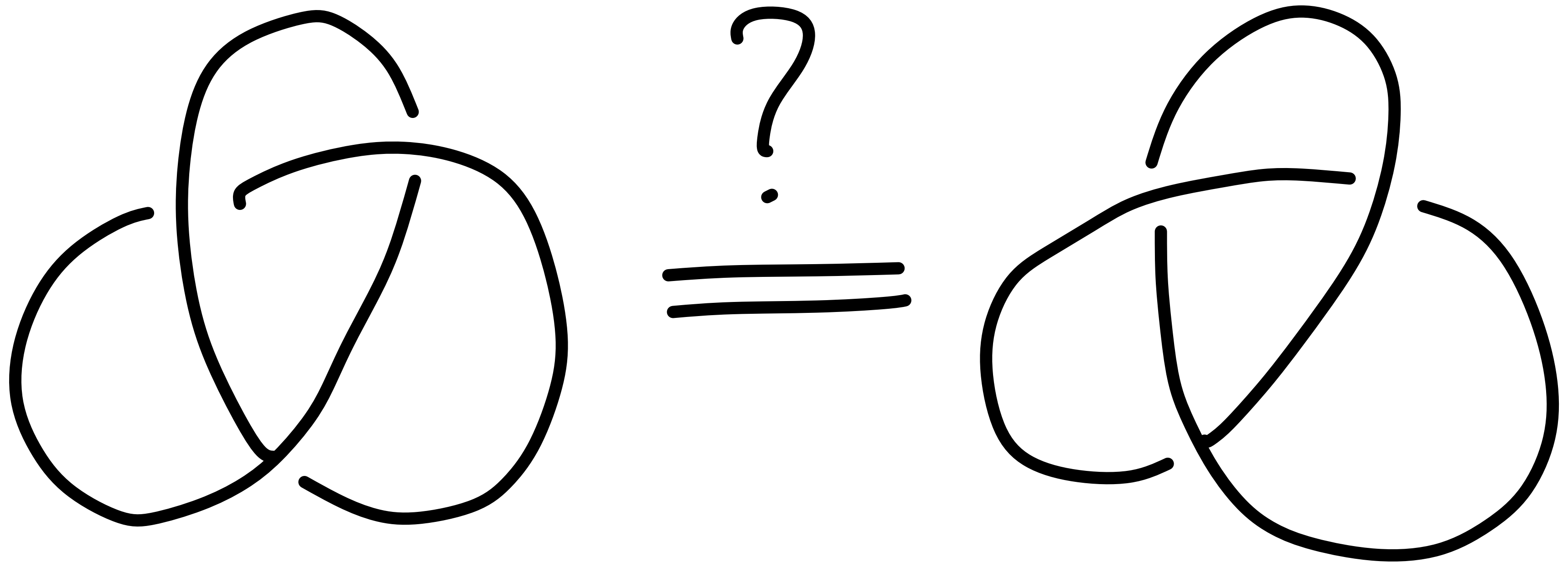
例

"連続変形" でうつりあうか？

①



②



コメント

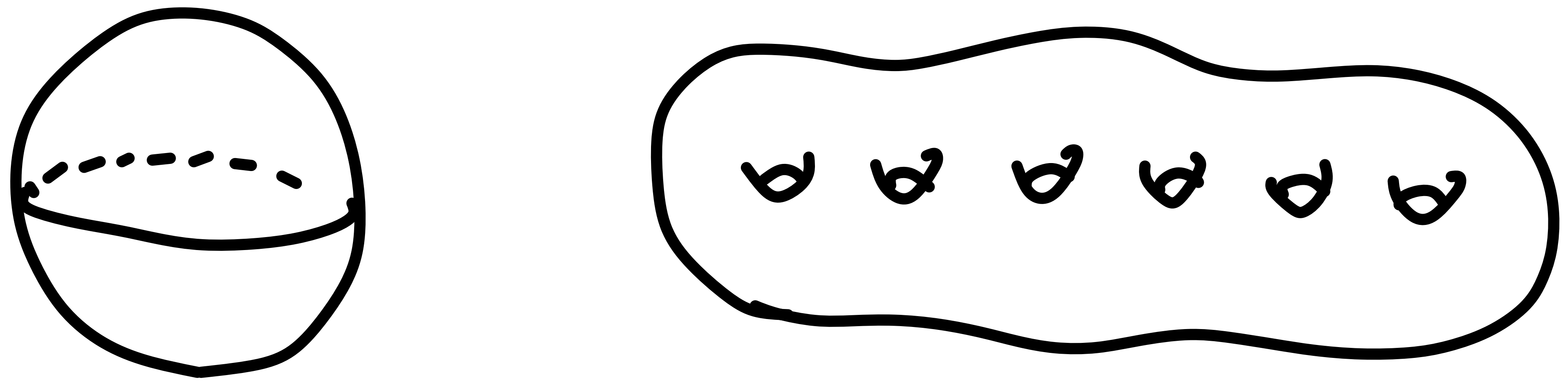
「どれだけ変形しても同じにならなかったから違う」は数学では許されません！

曲面については完全に仲間分けされている：

定理

向き付け可能閉曲面 S は 以下のただ1つに同相である.

球面, 種数 g の向き付け可能閉曲面 $(g=1, 2, 3, \cdots)$.



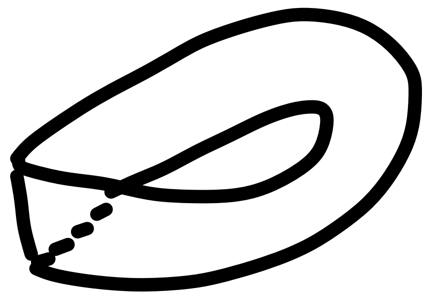
Key

トポロジーにおいて, 向き付け可能閉曲面は 種数(穴の数)で決まる!

補足

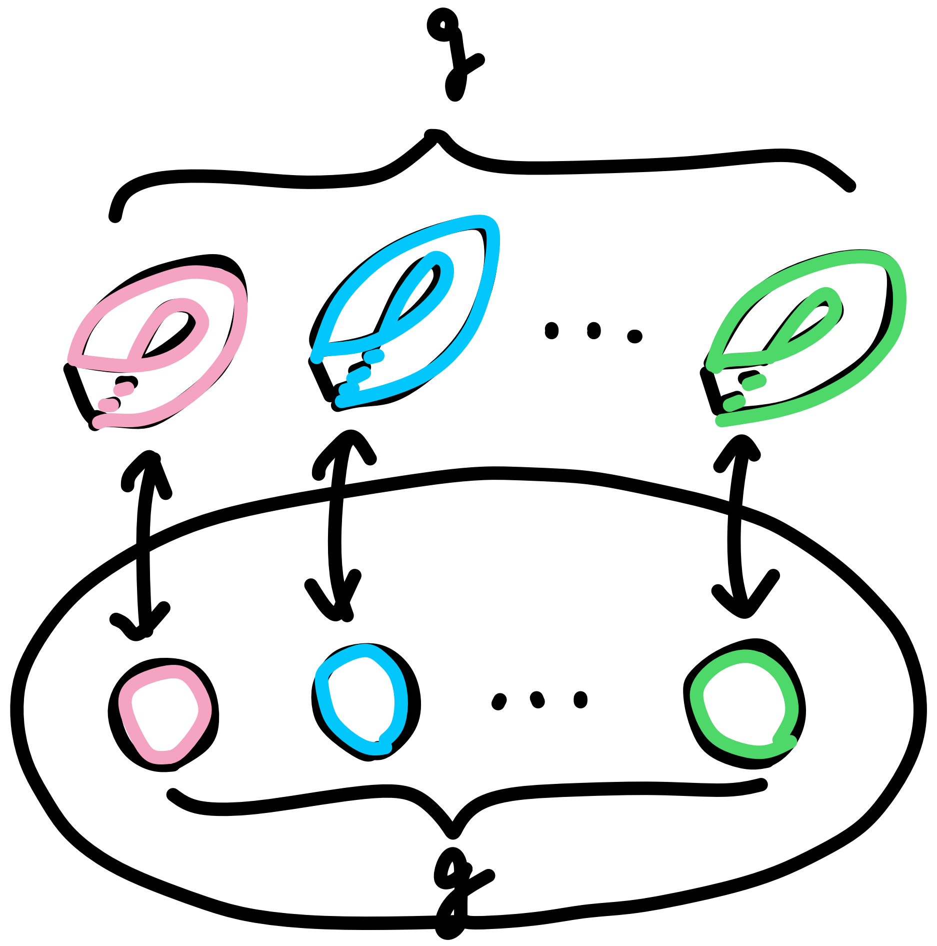
向き付け不可能曲面…"おもて"と"うら"の区別がつかない曲面。

例 メビウスの帯



分類もできている：

向き付け不可能閉曲面は、ある種数 $g \geq 1$ の向き付け不可能閉曲面と同相である。

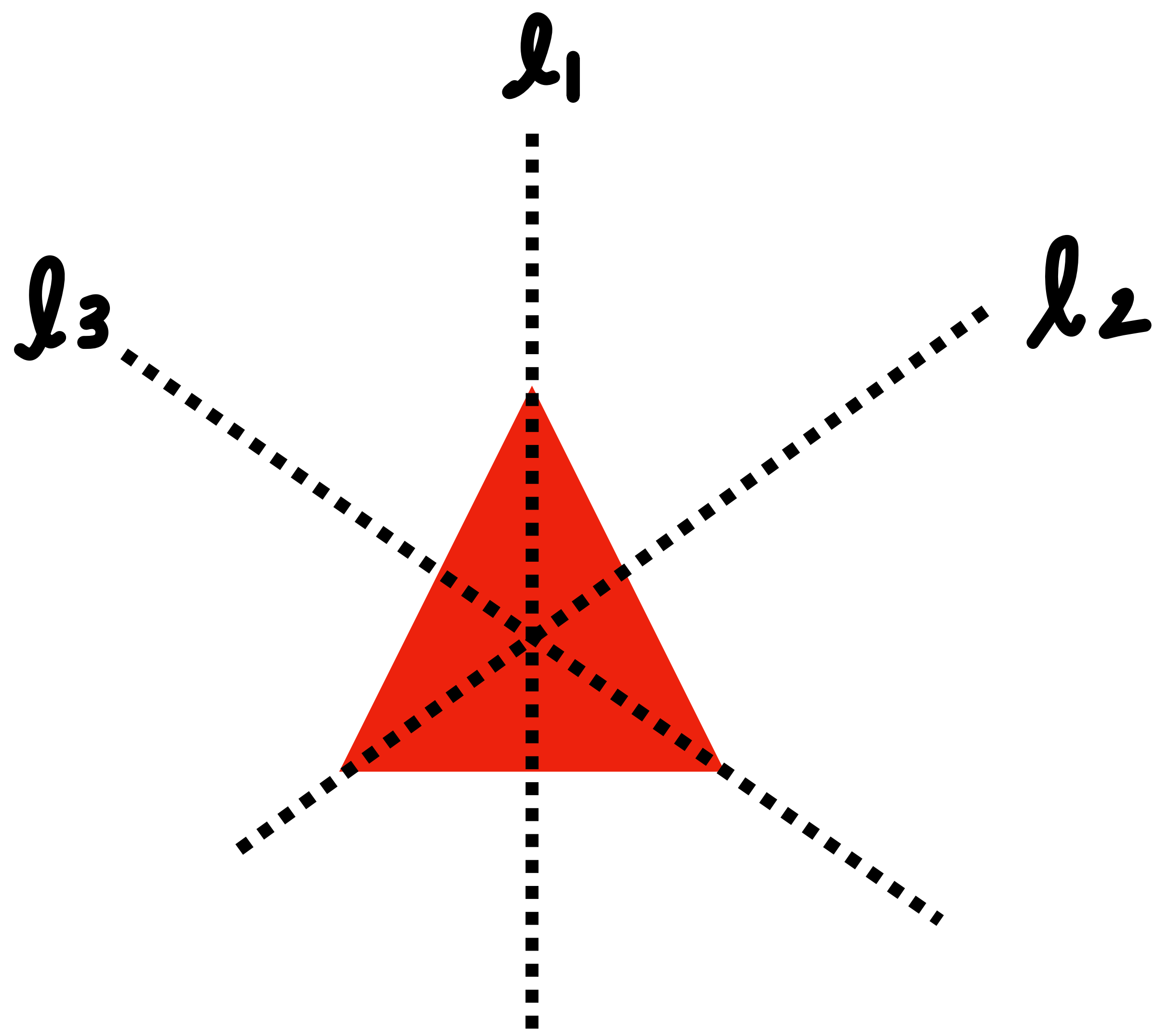


：種数 g の向き付け不可能閉曲面.

2. 曲面の“対称性”を記述する方法

- Emmanuel Boutet – Own work, CC BY-SA 3.0,
- https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1422224

例　三角形の合同変換（ユークリッド幾何の視点）



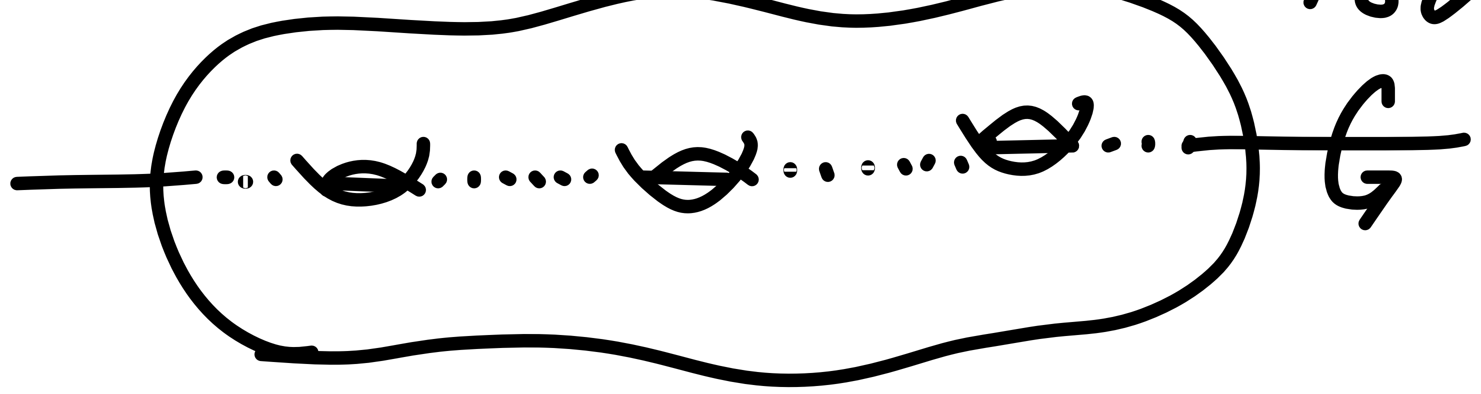
l_1, l_2, l_3 に関する鏡映は合同変換である。

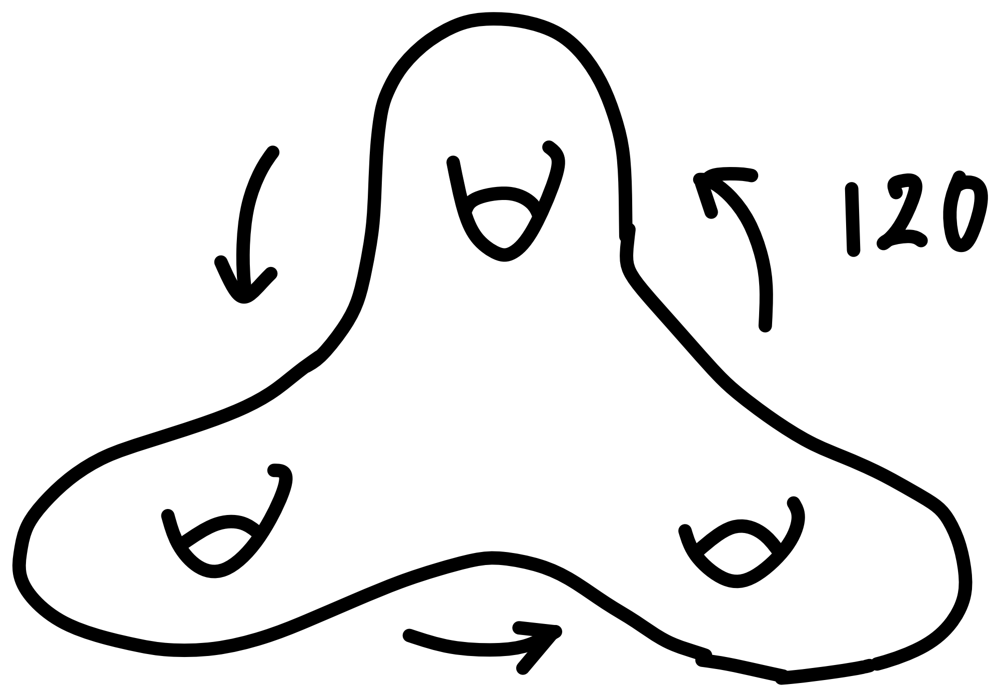
二面体群：正多角形の合同変換たちすべてからなる集合

ものの対称性をしらべる集合

トポロジーの視点で曲面の対称変換を考える.

S_g: 種数 g の向き付け可能閉曲面





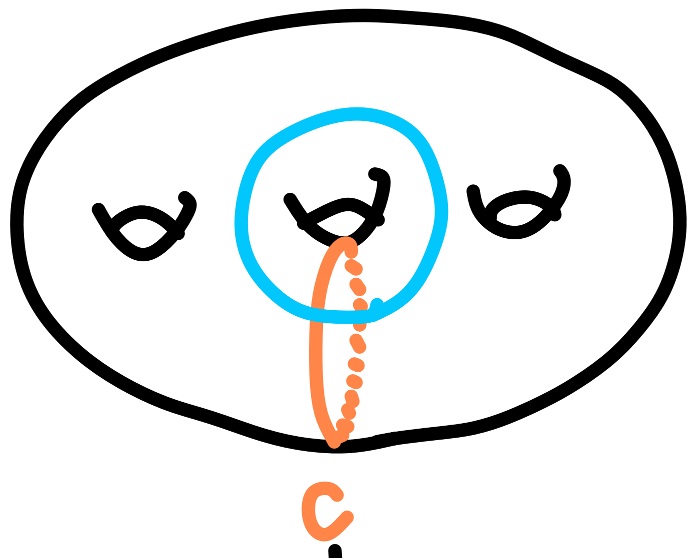
どちらも S_3 の同相な変換 = 同相写像と呼ぶ。

写像類群: S_g の同相写像(のアイソトピー類)すべてからなる集合.

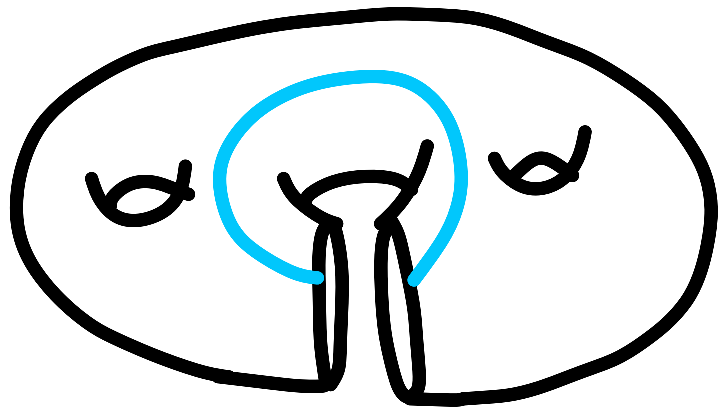
Key 写像類群はトポロジーの視点で曲面の対称性を記述する!

3. Dehnツイスト

Dehnツイストとは

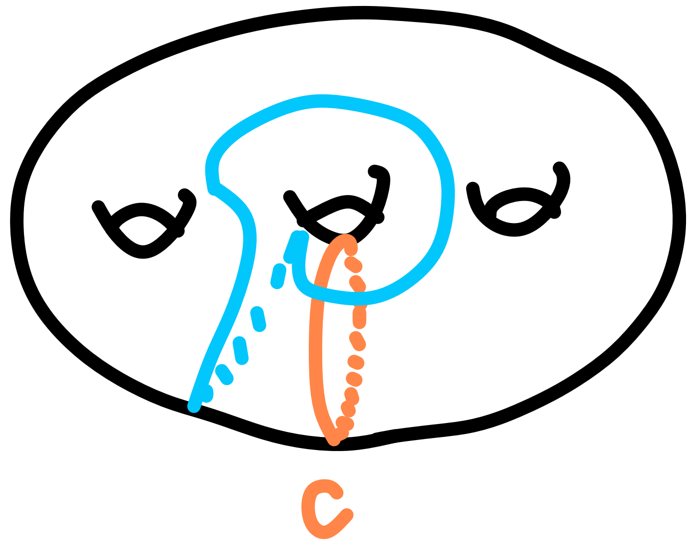


曲面上の1つの曲線 c に着目する.



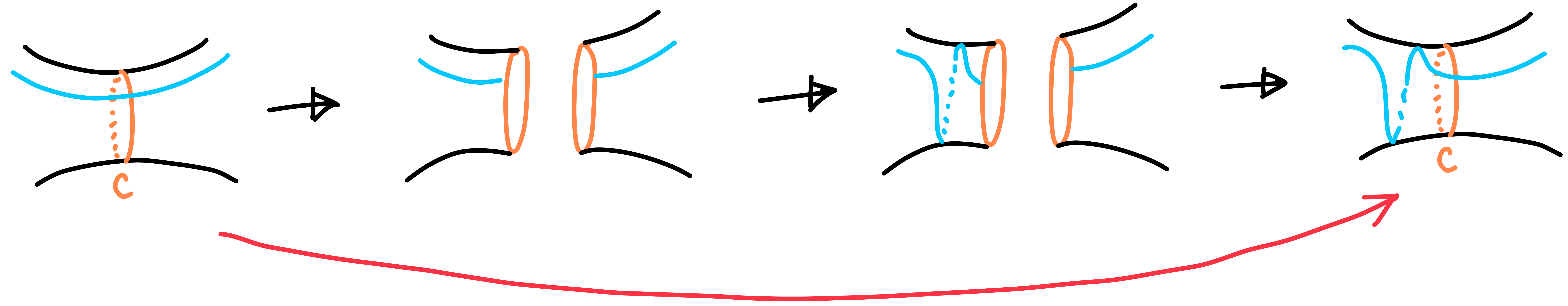
曲面を c で切る.

切った片側を 360° 右に回転する.



曲面を c で貼り戻す.

曲線 c の周辺を拡大して再び見る.



c に沿った正の Dehn ツイスト $=: t_c$

※ 同様に左に 360° 回転で負の Dehn ツイスト t_c^{-1} も定められる.

事実

t_c, t_c^{-1} は S_g の同相写像である.

今回の主定理

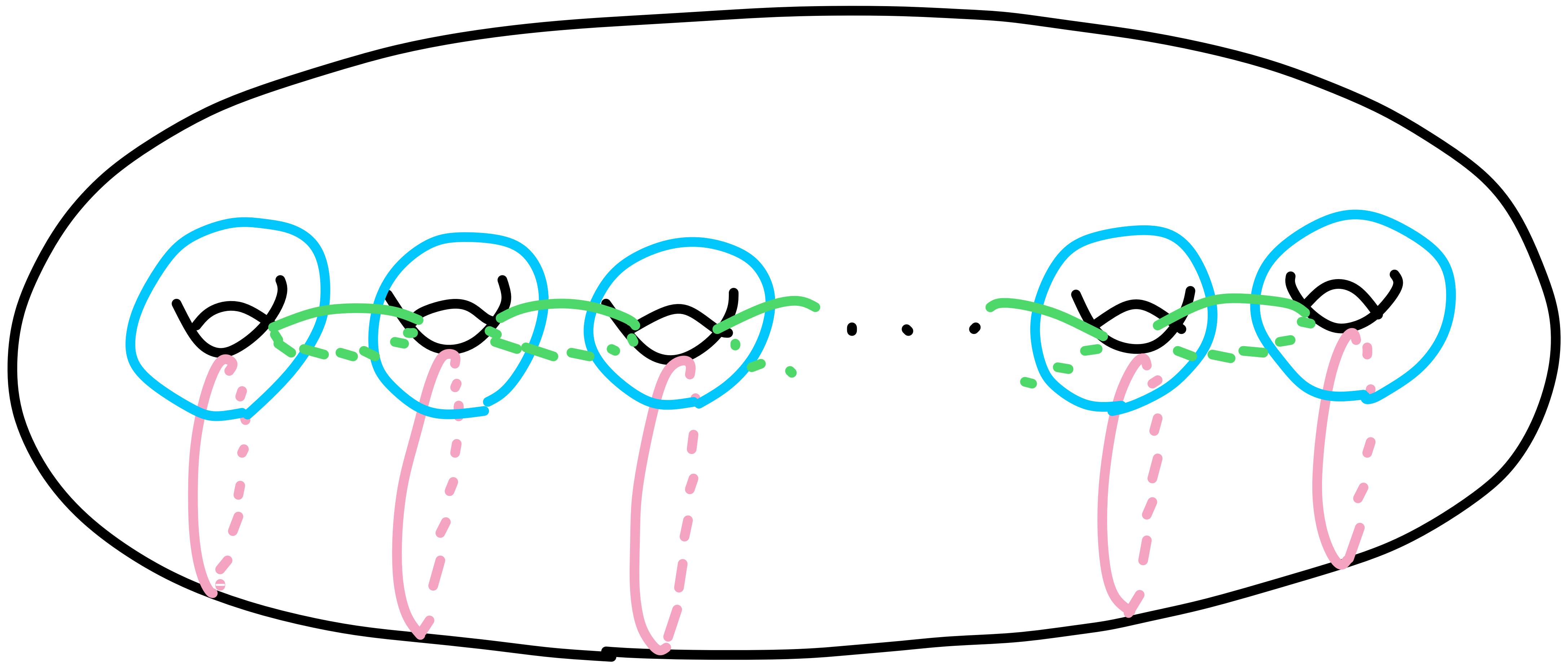
定理（Dehn－Lickorish の定理）
S_g 上の向きを保つ同相写像は Dehn ツイストたちを何回かおこなったものとアイソトピックである（トポロジー的に一致するということ）.

補足（参考 [Farb－Margalit]）

- Dehn (1938)： Dehn ツイストを導入する.
- Lickorish (1964)： S_g の写像類群 $(g \geq 1)$ は $3g-1$ 個の Dehn ツイストで生成される.

補足

Lickorish の生成系

$S_g =$ 

Key

トポロジーの視点で(向き付け可能閉)曲面を調べるのに
必要なのは Dehn ツイスト!

補足

同相写像が向きを保つ／保たないとは？

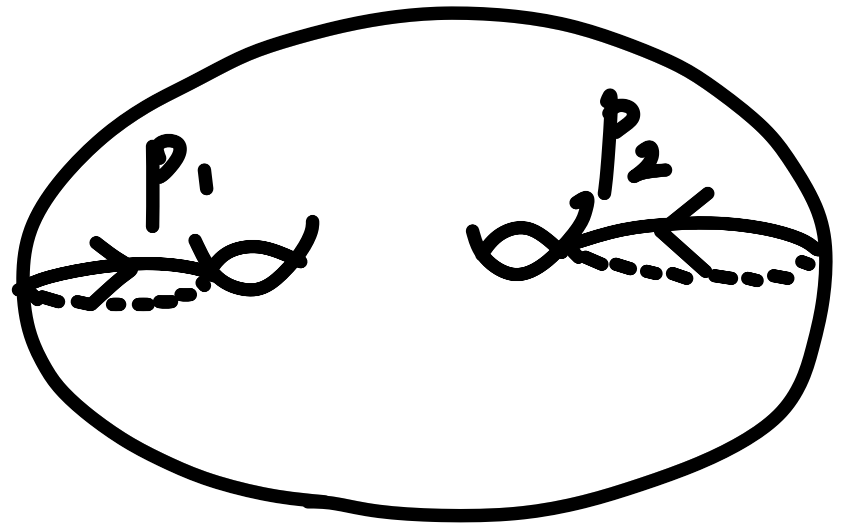
例：

曲面上の各点の周りに入れた座標のx軸とy軸の関係（順番）が

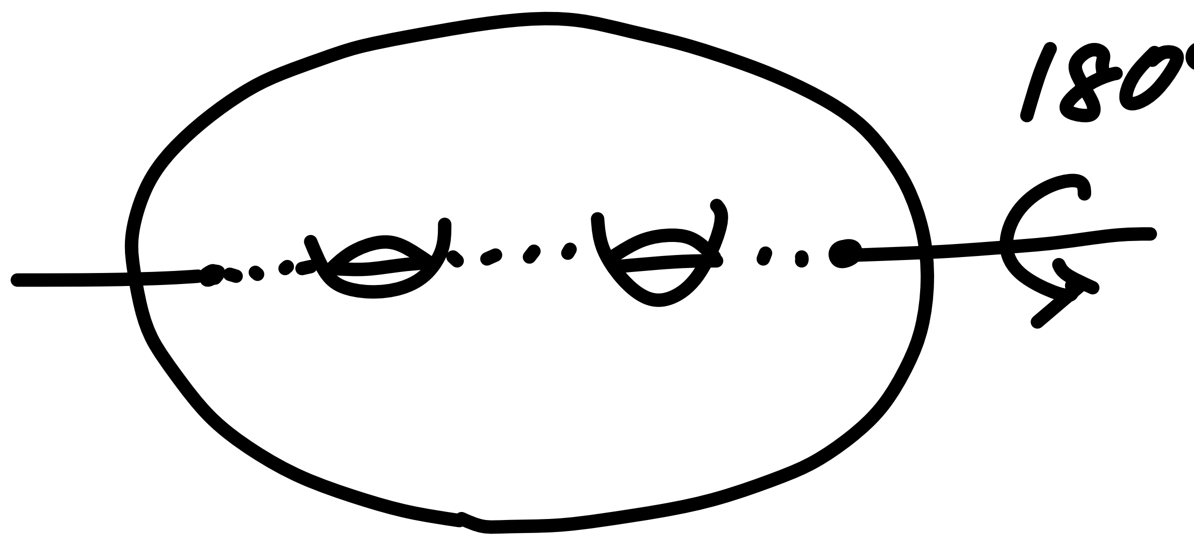
- 保たれる ⇒ 向きを保つ，
- 保たれない ⇒ 向きを逆にする．

Dehn ツイストの列を見つけてみよう.

<u>例</u>



p_1, p_2 : 向きも込めた曲線

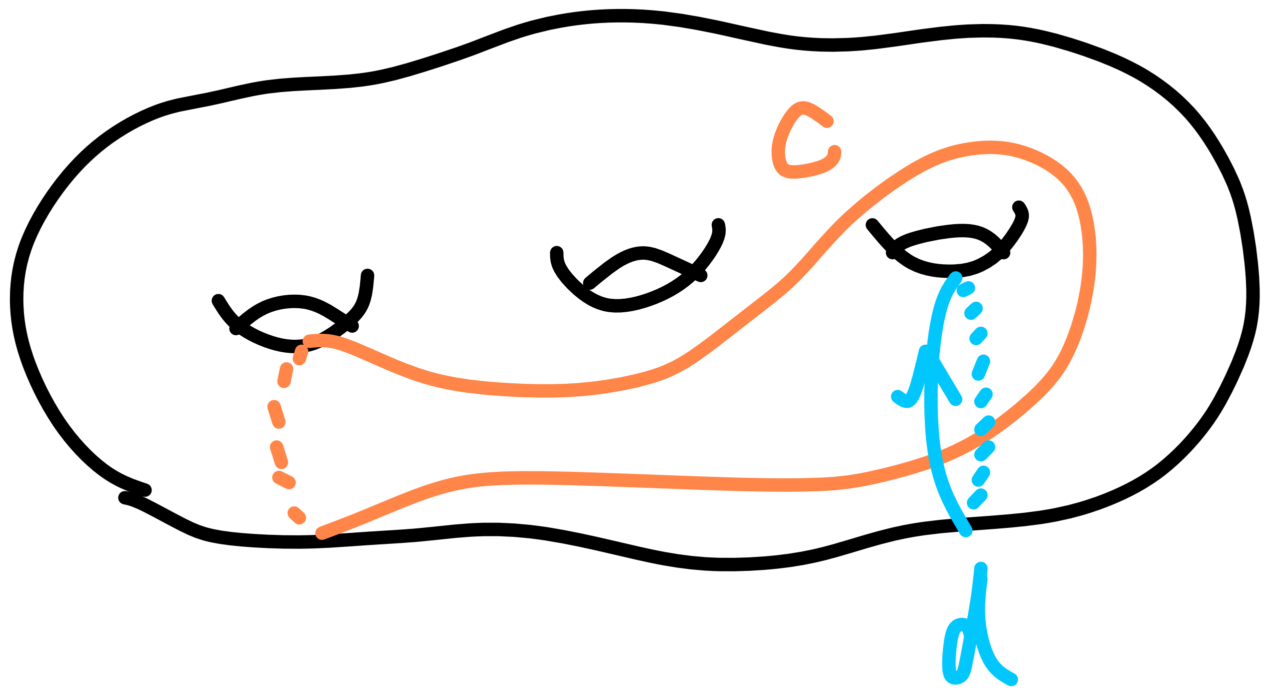


180°回転 $=: h$

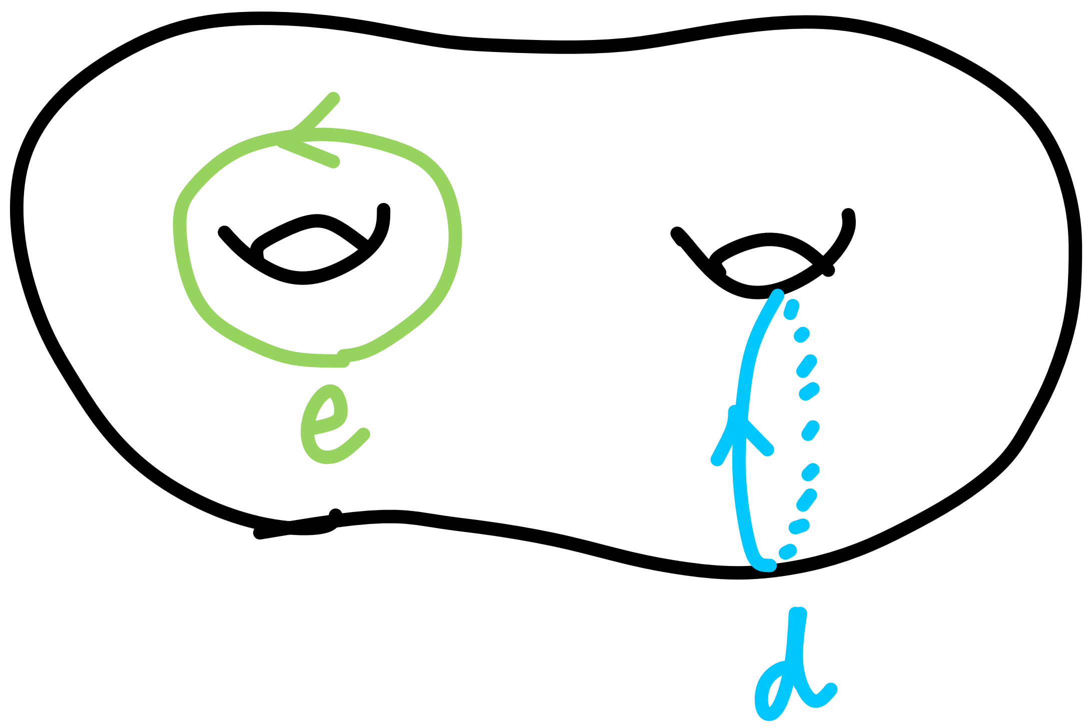
$h(p_1)$ と $h(p_2)$ をそれぞれ p_1 と p_2 に戻す Dehn ツイストの列を1つ見つける. ⇝ 黒板でデモンストレーションします.

Exercise （Dehnツイストしてみよう！）

(1) 下図の曲線 d に Dehnツイスト t_c と t_c^{-1} をおこなった結果をそれぞれ書け.

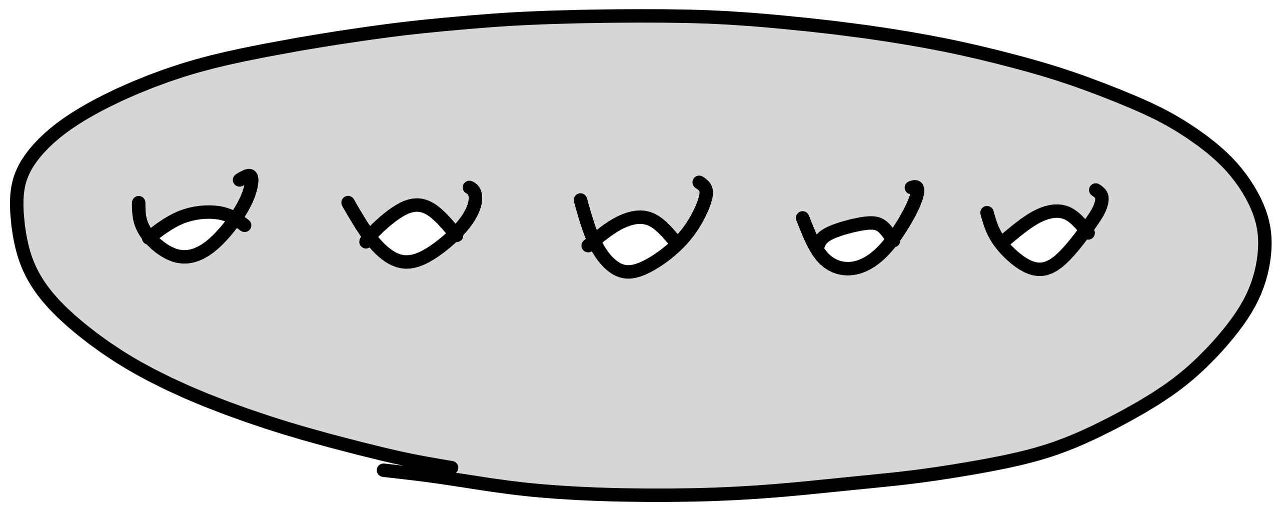


(2) 下図の d を e に Dehnツイストを何回かおこなってうつせ.



4. 曲面をひねって ひろがる数学たち

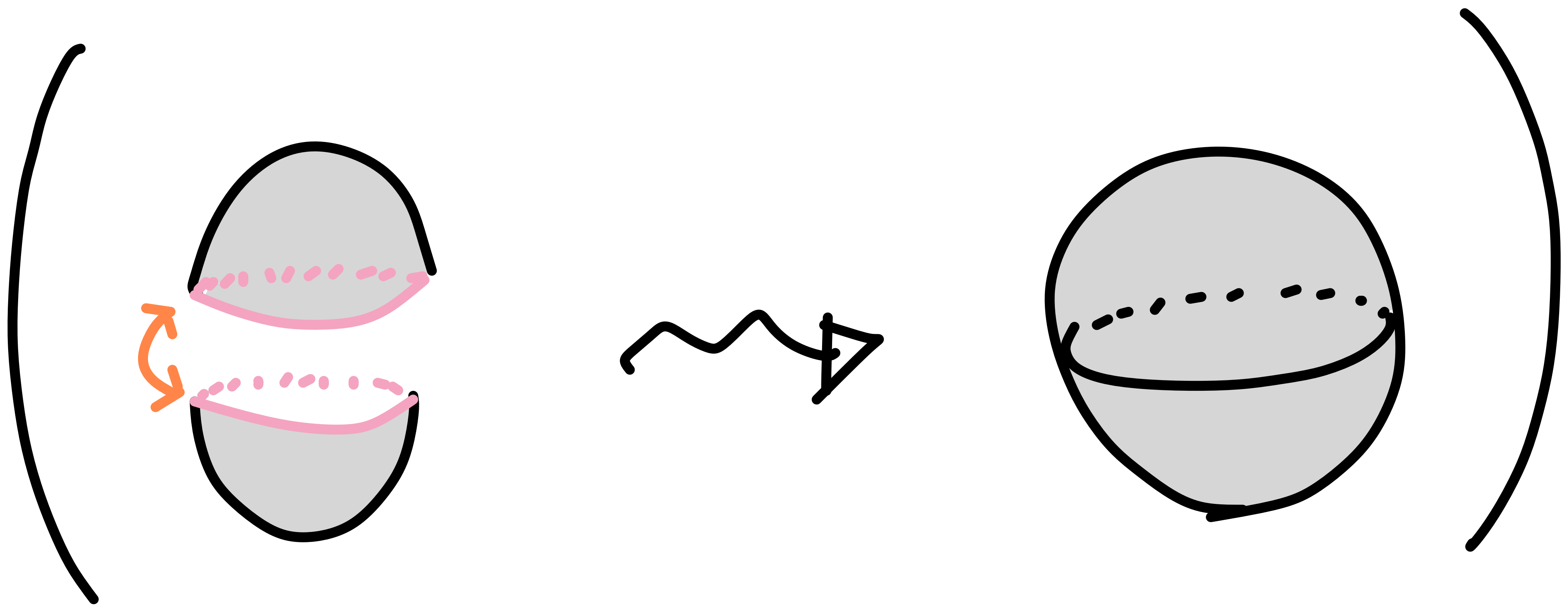
3次元トポロジー

$H_g :=$  ： 曲面 S_g の中身をつめた図形.

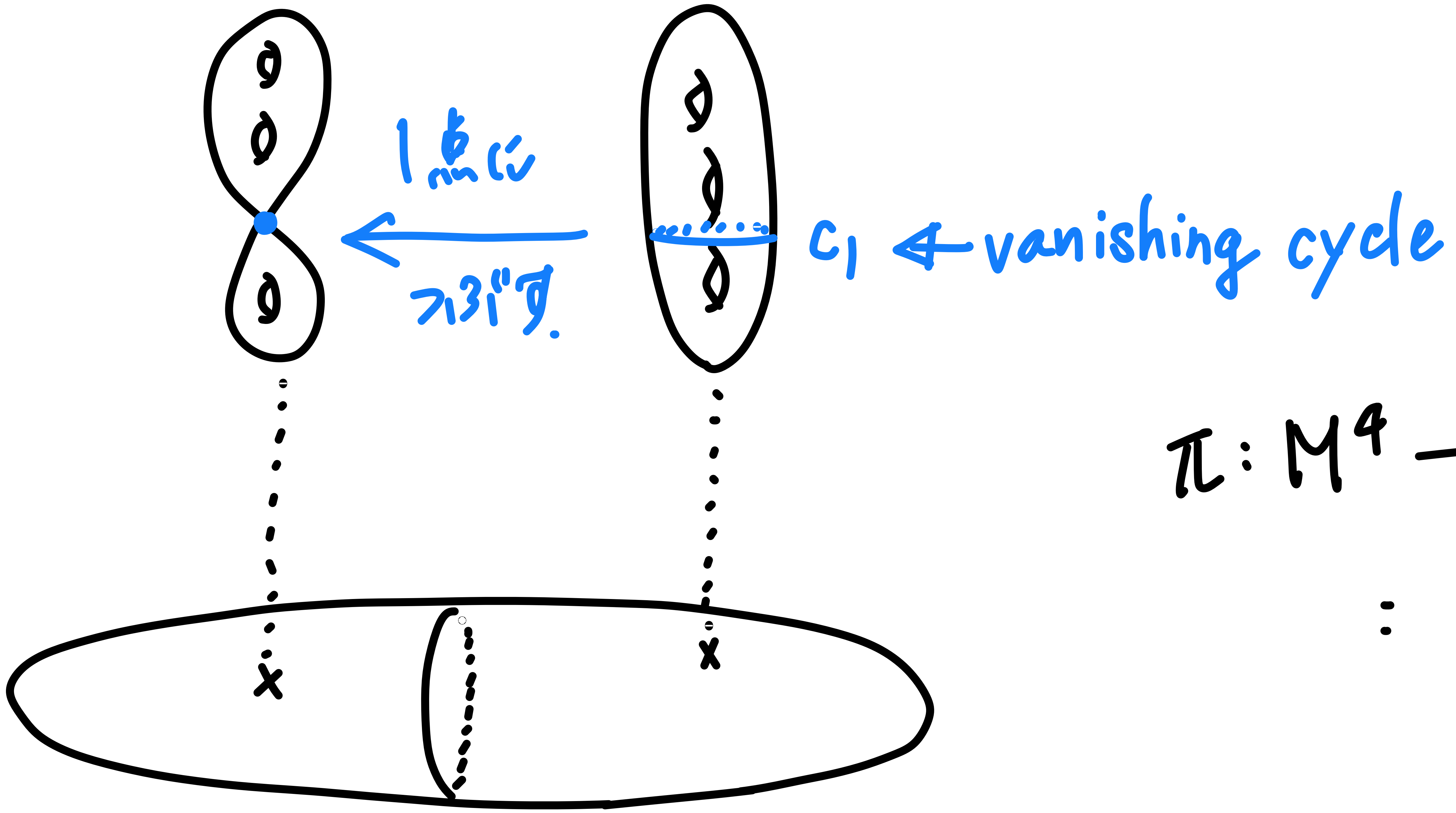
境界 S_g を同相写像で貼合せる.

⇝ 目に見えない3次元の図形を考えることができる！

"Heegaard 分解"



4次元トポロジー



$\pi : M^4 \to S^2$

: Lefschetz ファイバー空間 (LF)

事実

$\pi : M^4 \to S^2$ が vanishing cycles $c_1, c_2, \cdots, c_k$ を持つ種数 g の LF である

$\iff t_{c_1} t_{c_2} \cdots t_{c_k}$ が Σ_g 上の恒等写像とアイソトピックになる