ホモロジー的ミラー対称性

大阪大学理学研究科数学専攻
桑垣　樹

大阪大学数学科 2021 年度公開講座

今日の目標

ホモロジー的ミラー対称性とは何か?、雰囲気を知ってもらう。

今日の内容

1. ホモロジー的ミラー対称性とは何か？ホモロジー的ミラー対称性は何が面白いのか？なぜ大事なのか？
2. ホモロジー的ミラー対称性のもっとも簡単な例

ミラー対称性：1990 年前後に理論物理学で発見された現象。それがもたらす数学的予想・定理・哲学などがあまりにおもしろいので、数学者によっても盛んに研究されている。

ミラー対称性：1990 年前後に理論物理学で発見された現象。それがもたらす数学的予想・定理・哲学などがあまりにおもしろいので、数学者によっても盛んに研究されている。

そもそも数学者はどんなことを面白いと思うのか？

もちろん人それぞれ。

もちろん人それぞれ。

だが、よく面白がられる典型的なタイプのひとつとして、

全く由来の異なる対象・現象の間の類似性

日常的な例

現象 1

みかんが 3 個　と　みかんが 5 個　=　みかんが 8 個

日常的な例

現象 1

$$\text{みかんが 3 個} \quad \text{と} \quad \text{みかんが 5 個} \quad = \quad \text{みかんが 8 個}$$

現象 2

$$\text{りんごが 3 個} \quad \text{と} \quad \text{りんごが 5 個} \quad = \quad \text{りんごが 8 個}$$

日常的な例

現象 1

$$\text{みかんが 3 個} \quad \text{と} \quad \text{みかんが 5 個} \quad = \quad \text{みかんが 8 個}$$

現象 2

$$\text{りんごが 3 個} \quad \text{と} \quad \text{りんごが 5 個} \quad = \quad \text{りんごが 8 個}$$

もちろんみかんとりんごは「全く」違うもの。上の二つの現象は全く異なる現象。しかし、「個数」という点だけに注目すると、

$$3 + 5 = 8$$

日常的な例

現象 1

$$\text{みかんが 3 個} \quad \text{と} \quad \text{みかんが 5 個} \quad = \quad \text{みかんが 8 個}$$

現象 2

$$\text{りんごが 3 個} \quad \text{と} \quad \text{りんごが 5 個} \quad = \quad \text{りんごが 8 個}$$

もちろんみかんとりんごは「全く」違うもの。上の二つの現象は全く異なる現象。しかし、「個数」という点だけに注目すると、

$$3 + 5 = 8$$

もっと言えば、「みかん」を「りんご」に変換（翻訳）することで、現象は同一視できる。

全く由来の異なる対象・現象の間の類似性

もちろん（現代の？もしくはある程度の年齢に達している?)
ぼくらはみかんやりんご、個数という概念にあまり慣れすぎていて先の例にはなんの驚きもない。

もちろん（現代の？もしくはある程度の年齢に達している？）ぼくらはみかんやりんご、個数という概念にあまり慣れすぎていて先の例にはなんの驚きもない。
しかし、数学には (現代の？) ぼくらにとっては驚くべき類似性（翻訳）が観察されることがある。

1. 曲線、数、関数の類似性（Weil のロゼッタストーン）: エドワード・フレンケル “数学の大統一に挑む”
2. 微分方程式と代数方程式の類似性：久我道郎 “ガロアの夢”

などなど。

ミラー対称性もそのような驚くべき翻訳のひとつ。

なぜ翻訳を作りたいのか？

圧倒的に面白いから！$\rightsquigarrow$ それだけではない！

なぜ翻訳を作りたいのか？

圧倒的に面白いから！ $\rightsquigarrow$ それだけではない！
片方で知られている技術や概念がもう片方で知られていないのであるならば、新しい技術・概念を輸入できるかもしれない。

なぜ翻訳を作りたいのか？

圧倒的に面白いから！$\rightsquigarrow$ それだけではない！
片方で知られている技術や概念がもう片方で知られていないのであるならば、新しい技術・概念を輸入できるかもしれない。

再び日常的な例

日本語と英語の辞書

$$\text{I am Tatsuki} \leftrightarrow \text{私はたつきです}$$

しかし、辞書は不完全かもしれない!

なぜ翻訳を作りたいのか？

圧倒的に面白いから！ $\rightsquigarrow$ それだけではない！
片方で知られている技術や概念がもう片方で知られていないのであるならば、新しい技術・概念を輸入できるかもしれない。

再び日常的な例

日本語と英語の辞書

$$\text{I am Tatsuki} \leftrightarrow \text{私はたつきです}$$

しかし、辞書は不完全かもしれない!

$$? \leftrightarrow \text{わびさび}$$

なぜ翻訳を作りたいのか？

圧倒的に面白いから！ $\rightsquigarrow$ それだけではない！
片方で知られている技術や概念がもう片方で知られていないのであるならば、新しい技術・概念を輸入できるかもしれない。

再び日常的な例

日本語と英語の辞書

$$\text{I am Tatsuki} \leftrightarrow \text{私はたつきです}$$

しかし、辞書は不完全かもしれない!

$$? \leftrightarrow \text{わびさび}$$

Wabisabi: 英語話者の人が「わびさび」がなんであるかを理解すると、「わびさびの心」が生まれる (かもしれない)。

それではミラー対称性

未定義だがとりあえずお経として、

ミラー対称性

ミラー対称性とは、シンプレクティック幾何学と代数幾何学（複素幾何）の間の「対称性」である。

それではミラー対称性

未定義だがとりあえずお経として、

ミラー対称性

ミラー対称性とは、シンプレクティック幾何学と代数幾何学（複素幾何）の間の「対称性」である。

すこしだけ平たくいうと、

1. 二種類の由来の異なる幾何学の間に「関係がある」
2. 「対称性」という言葉は少しミスリーディング。非自明な関係がある、という意味。これの雰囲気をだんだんと説明していく。

二つの幾何学

ミラー対称性

ミラー対称性とは、シンプレクティック幾何学と代数幾何学の間の「対称性」である。

これら二つの幾何学について説明する。

シンプレクティック幾何学

力学に由来する幾何学。

力学

力学とはものの運動を調べる学問。

シンプレクティック幾何学

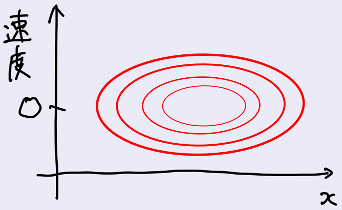
力学に由来する幾何学。

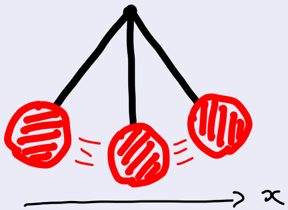
力学

力学とはものの運動を調べる学問。

位置と速度（運動量）の軌跡を図示する空間を相空間という。

振り子の運動





振り子の運動はこの図形だけ十分に記述できている。

相空間はシンプレクティック幾何の例

（ここから２枚のスライドはやや難）
一般に、その上に「位置と速度を図示できる空間」とはどんな空間だろう？

1. 位置と速度はペアになって現れるので、空間の次元は偶数次元でなければいけない。
2. 運動による相空間体積の不変性 (Liouvlle の定理)$\rightsquigarrow$ 体積のようなものが定義されていないければいけない。

相空間体積をもっと精密にした構造が、シンプレクティック構造。
(cf. クラインの G 幾何で $G =$ シンプレクティック群をとったもの)

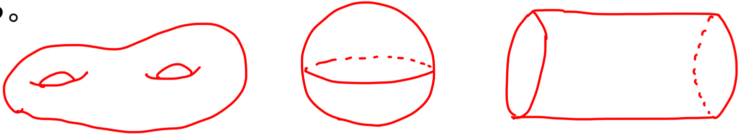
シンプレクティック幾何

もともとは上のような動機で発見・研究されたのだが、「力学」という文脈を離れて、いろいろな数学に現れる:

1. 複素数での計量幾何と相性が良い（ケーラー幾何）
2. 変形理論と相性が良い（微分方程式、変形量子化、表現論など）

今回考えるのは二次元の場合。この場合は、そんなに難しくない: 体積やおおまかな形を変えないような操作をしていい幾何学

（向き付け可能な）曲面では、シンプレクティック幾何を考えられる。

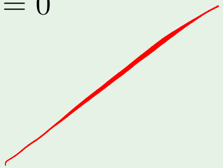


代数幾何学

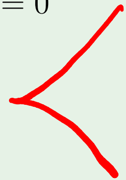
多項式の零点として定義される図形を調べる学問。古くからよく調べられている。

Example

$y - x = 0$

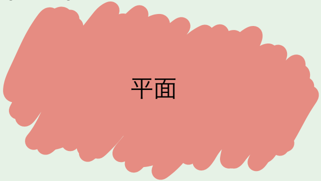


$y^2 - x^3 = 0$



$y = 0$

$0 = 0$



スキーム論

20 世紀中盤以降に代数幾何学の基礎が、Grothendieck という数学者によって大きく書き換えられた。(代数幾何学に現れる「図形」の概念が大きく変わった。)

アレクサンダー・グロタンディーク

20 世紀最大の数学者のひとり。

スキーム論

20 世紀中盤以降に代数幾何学の基礎が、Grothendieck という数学者によって大きく書き換えられた。(代数幾何学に現れる「図形」の概念が大きく変わった。)

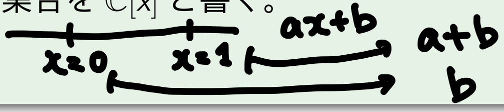
アレクサンダー・グロタンディーク

20 世紀最大の数学者のひとり。

Grothendieck のアイデアを紹介するために「図形の上に住んでいる」関数を考える。ただし、代数的な関数（多項式っぽい関数）を考える。

Example

例えば直線上には 1 変数多項式を考える。複素数係数 1 変数多項式全体の集合を $\mathbb{C}[x]$ と書く。



図形の上の関数 $=$ 図形の上の点ごとに、一つ数を与える装置

Example

平面上では 2 変数の多項式を考える。複素数係数 2 変数多項式全体の集合を $\mathbb{C}[x, y]$ と書く。たとえば、
$x^4 + 1, y^2 + 1, 3x + 2y + 1, 2x + 3y + 1$ などなどがその例。

Example

平面上では 2 変数の多項式を考える。複素数係数 2 変数多項式全体の集合を $\mathbb{C}[x, y]$ と書く。たとえば、
$x^4 + 1, y^2 + 1, 3x + 2y + 1, 2x + 3y + 1$ などなどがその例。

おそらくここまでは何がしたいのかよくわからなかったと思う。

Example

y-x=0 という図形を考える。2 変数多項式は、この図形の上に住んでいる関数でもある。ところが、今回は

$$3x + 2y + 1 = 2x + 3y + 1$$

つまり、$\mathbb{C}[x, y]$ で $x = y$ としたものが、この図形の上に住んでいる $\rightsquigarrow$ 1 変数多項式 $\mathbb{C}[x]$(もしくは $\mathbb{C}[y]$) と同じ。

Example

$y - x^2 = 0$ という図形を考える。2 変数多項式は、この図形の上に住んでいる関数でもある。ところが、今回は

$$y^2 + 1 = x^4 + 1$$

つまり、$\mathbb{C}[x, y]$ で $y = x^2$ としたものが、この図形の上に住んでいる。$\rightsquigarrow$ 1 変数多項式 $\mathbb{C}[x]$ と同じ。

$y^2 - x^3 = 0$ の場合は 1 変数多項式にはならない！（チェックしてみてよう）。図形が滑らかな曲線ではないことに対応している。

スキーム論

Grothendieck「図形（空間）はその上に住んでいる関数たちによって規定されている」

スキーム論

Grothendieck「図形（空間）はその上に住んでいる関数たちによって規定されている」

図形の上の関数たちは、「環」をなす:「足し算」と「掛け算」ができる数学の体系。たとえば、多項式の集合。
$\rightsquigarrow$ 環があれば、「幾何学」がある

スキーム論

Grothendieck「図形（空間）はその上に住んでいる関数たちによって規定されている」

図形の上の関数たちは、「環」をなす:「足し算」と「掛け算」ができる数学の体系。たとえば、多項式の集合。
$\rightsquigarrow$ 環があれば、「幾何学」がある

なぜこれがブレークスルーなのか？

「図形」がないところにも「図形」を考えられる

1 変数多項式 $\mathbb{C}[x]$ $\rightsquigarrow$ 対応する図形がある「直線」
2 変数多項式 $\mathbb{C}[x, y]$ $\rightsquigarrow$ 対応する図形がある「平面」
整数 $\rightsquigarrow$ 対応する図形?

整数に対応する図形なんてものを我々はよく知らない
$\rightsquigarrow$ スキーム論の考え方を使うと、整数を幾何学的に研究できる。（これも翻訳の一例）

ミラー対称性

ミラー対称性

ミラー対称性とは、シンプレクティック幾何学と複素幾何学の間の「対称性」である。

どのように発見されたのか？

素粒子論

素粒子の性質、素粒子の間に働く力を研究している。

1. 電磁気力
2. 弱い核力
3. 強い核力
4. 重力

重力を含めてミクロの物理学を記述するための候補として、弦理論（ひも理論）がある。

素粒子は振動するひもである

素粒子論

素粒子の性質、素粒子の間に働く力を研究している。

1. 電磁気力
2. 弱い核力
3. 強い核力
4. 重力

重力を含めてミクロの物理学を記述するための候補として、弦理論（ひも理論）がある。

素粒子は振動するひもである

弦理論がうまくいくには時空の次元が 4 次元より大きくないといけない $\rightsquigarrow$ 余分な次元を小さく丸め込む方法が知られている
$\rightsquigarrow$ 結果としてぼくらには 4 次元しか見えない。

弦理論

異なる弦理論 (A, B) を異なる丸め込み方をすると、結果として得られる 4 次元物理の理論が同じ場合がある。

弦理論

異なる弦理論 (A, B) を異なる丸め込み方をすると、結果として得られる 4 次元物理の理論が同じ場合がある。
丸め込んだ部分の幾何は、異なる方法で理論に寄与する：

$$\begin{cases} \text{A: シンプレクティック幾何} \\ \text{B: 代数幾何 (複素幾何)} \end{cases}$$

弦理論

異なる弦理論 (A, B) を異なる丸め込み方をすると、結果として得られる 4 次元物理の理論が同じ場合がある。
丸め込んだ部分の幾何は、異なる方法で理論に寄与する：

$$\begin{cases} \text{A: シンプレクティック幾何} \\ \text{B: 代数幾何 (複素幾何)} \end{cases}$$

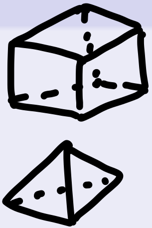
最終的に得られる理論が同じということは、シンプレクティック幾何と代数幾何に非自明な関係を示唆する
$\rightsquigarrow$ ミラー対称性

ミラー対称性の例

ホッジ数のミラー対称性

オイラー数: 立方体

$$\text{面の数} - \text{辺の数} + \text{頂点の数}$$



2 になる。四面体でも、2。

ミラー対称性の例

ホッジ数のミラー対称性

オイラー数: 立方体

$$\text{面の数} - \text{辺の数} + \text{頂点の数}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & h^{0,0} & & & \\ & & h^{1,0} & & h^{0,1} & & \\ & h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} & \\ h^{3,0} & & h^{2,1} & & h^{1,2} & & h^{0,3} \\ & h^{3,1} & & h^{2,2} & & h^{1,3} & \\ & & h^{3,2} & & h^{2,3} & & \\ & & & h^{3,3} & & & \end{array}$$

2 になる。四面体でも、2。
$\rightsquigarrow$ ホッジ数 (オイラー数の精密化) が異なるカラビヤウ多様体の間で鏡写しになっている（これはミラー対称性の名前の由来。）

ミラー対称性の例

ホッジ数のミラー対称性

オイラー数: 立方体

$$\text{面の数} - \text{辺の数} + \text{頂点の数}$$

2 になる。四面体でも、2。
$\rightsquigarrow$ ホッジ数 (オイラー数の精密化) が異なるカラビヤウ多様体の間で鏡写しになっている（これはミラー対称性の名前の由来。）

積分と数え上げ

シンプレクティック幾何の方で曲線を数えるという作業を、複素幾何の方での積分に翻訳する。

などなど

ホモロジー的ミラー対称性

1994 年に Maxim Kontsevich によって提唱された予想で、ミラー対称性現象の統一的理解を与えると信じられている。

ホモロジー的ミラー対称性

1994 年に Maxim Kontsevich によって提唱された予想で、ミラー対称性現象の統一的理解を与えると信じられている。

予想：複素幾何とシンプレクティック幾何に付随するホモロジー代数的対象が同じになる。

全く異なる由来の幾何学の、ホモロジー的代数的側面が一致するという予想。

$\rightsquigarrow$

多くの技術・哲学が相互に輸入され、それぞれの分野の理解が深まっている。例：(シ $\to$ 代) 球面ツイスト、(代 $\to$ シ) 安定性

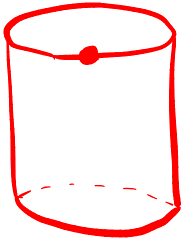
ここまでのまとめ

- 数学で興味を持たれていることの一つ：異なる分野の間の関係性。技術・哲学の輸出入が起きる。
- ミラー対称性はそんなものの例。全く異なる幾何学の間の関係性を主張している。
- シンプレクティック幾何学は、解析力学から現れた幾何学。
- 代数幾何学は、代数方程式で定義される幾何学。

実践編

簡単な場合のホモロジー的ミラー対称性を見てみる：

代数幾何		シンプレクティック幾何
直線 つまり 多項式 $\mathbb{C}[x]$	$\leftarrow$ ミラー対称性 $\rightarrow$	円筒 片側の端に引っかかり

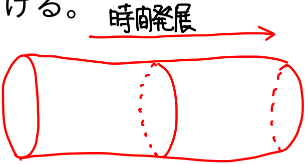


多項式のようなものがシンプレクティック幾何側に現れることを観察する。

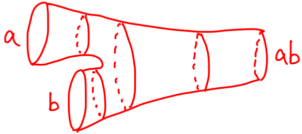
多項式のように足し算掛け算できるものを、どのようにシンプレクティック幾何の中に見出すのか？
$\rightsquigarrow$ 演算の幾何学的な表し方として、物理から来た TQFT というアイデアを用いる。

2dTQFT(2 次元位相的場の量子論)

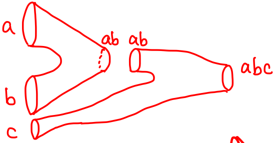
弦の運動・生成消滅を捉える位相幾何的モデル。閉じた弦の時間発展の軌跡は円筒としてかける。



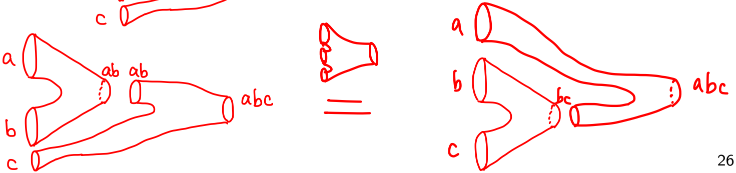
閉じた元の衝突・消滅（かけ算）



かけ算 2 回

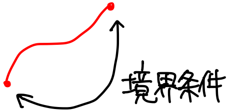


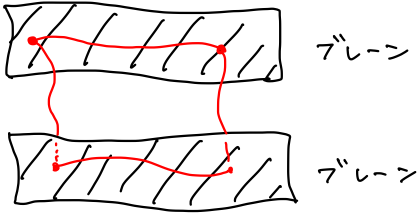
結合法則

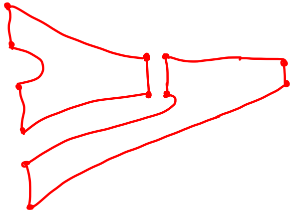


開弦の場合

開弦の場合もほとんど同じ、だが、境界条件を指定しないといけない ⇝ ブレーン



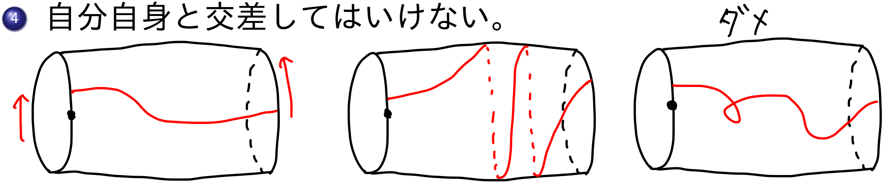




役者は出揃ったのでルールを決める

シンプレクティック幾何でのブレーンを A ブレーンと呼ぶ。

1. A ブレーンとして、以下の絵に描いてあるものを考える。
2. 円筒の境界に沿って時計回りに回した A ブレーンは同じものだと考える。ただし、引っかかりを越えてはいけない。
3. 円筒の中身ではどのように動かしてもよい。
4. 自分自身と交差してはいけない。

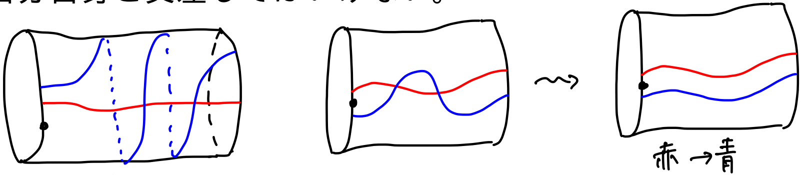


1. 複数 A ブレーンを連れてくる。
2. A ブレーン同士が交差してくるところから、開弦が生まれてくると考える。
3. 上で許されている操作で「外せる交差」は外しておく。（ただし、動かすのは片方のみ。）

役者は出揃ったのでルールを決める

シンプレクティック幾何でのブレーンを A ブレーンと呼ぶ。

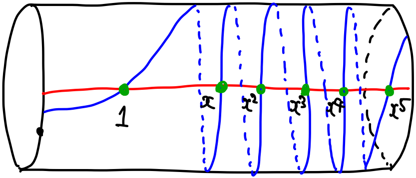
1. A ブレーンとして、以下の絵に描いてあるものを考える。
2. 円筒の境界に沿って時計回りに回した A ブレーンは同じものだと考える。ただし、引っかかりを越えてはいけない。
3. 円筒の中身ではどのように動かしてもよい。
4. 自分自身と交差してはいけない。



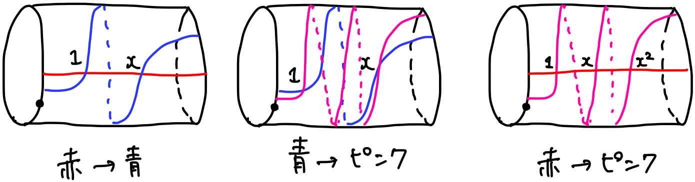
1. 複数 A ブレーンを連れてくる。
2. A ブレーン同士が交差してくるところから、開弦が生まれてくると考える。
3. 上で許されている操作で「外せる交差」は外しておく。(ただし、動かすのは片方のみ。)

交差に名前をつけて演算を見る

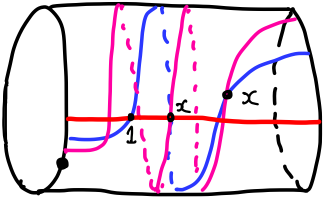
名前をつけておく



かけ算

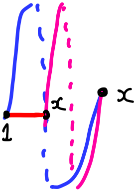


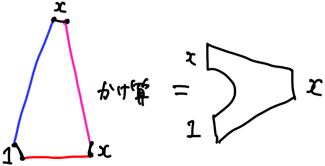
交差に名前をつけて演算を見る



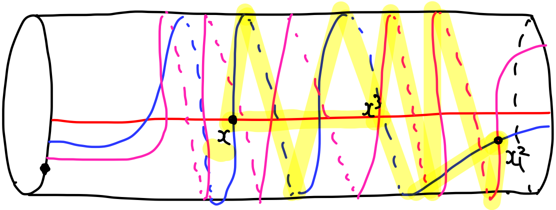
(赤 → 青]の 1) × (青 → ピンク]の x) = (赤 → ピンク]の x)

かけ算





課題1：他の場合も試してみよう



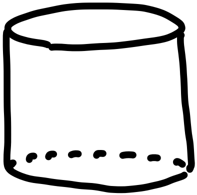
課題2：経済的でない交差がある場合はどうなるか？

?

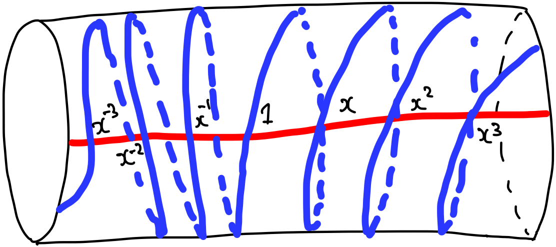
他の例

「なんか人工的に作ったルールで、なんか対応してると言われてもなあ？」$\rightsquigarrow$ もちろんその気持ちには同意する。ぼくらも一つの例をみてホモロジー的ミラー対称性を信じたのではなく、大量の非自明な例・状況証拠を通じて、信じるに足ると考えているのである。

代数幾何		シンプレクティック幾何
直線ひく原点	$\leftarrow$ ミラー対称性 $\rightarrow$	円筒
ローラン多項式 $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$		



同様の演算



ホモロジー的？

ホモロジー代数とは、ここでは環上の加群を考えて色々すること。
加群とは？: 多項式の掛け算のルールを保って、掛け算できるもの。

Example

多項式自体にも多項式を掛け算できる。

Example

x を法にした多項式たち。つまり、

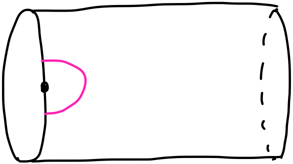
$$3x^2 + x + 2 = 3x^2 + 2 = 2$$

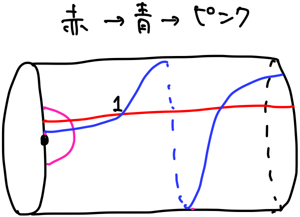
言い換えると、x に 0 を代入したと思っても良い。これにも多項式を掛け算できる。たとえば、

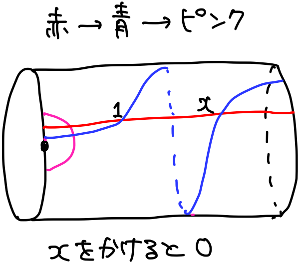
$$(x^3 + 2x + 1) \cdot (x^2 + 2) = 2$$

ミラーでは？

シンプレクティック幾何の方で加群を考えることは、他のブレーンも考えることに対応する：x を法にした多項式たちに対応する A ブレーン



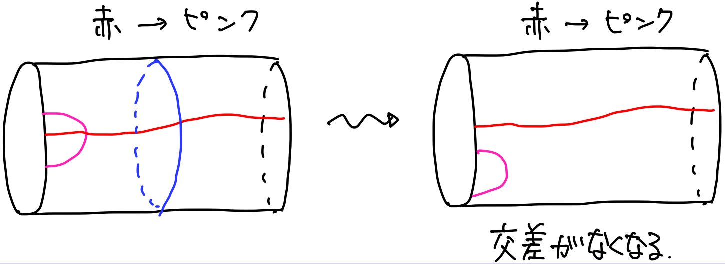




ローランでは？

x を法にすると、全てのローラン多項式は 0 になる。⇝A ブレーンで対応する現象

$$ax^n + bx^{n-1} + \cdots + cx^{-m}$$
$$= x\,(ax^{n-1} + \cdots + cx^{-m-1}) = 0$$



Remark

$x - a$ $(a \neq 0)$ を法にした演算はできる。対応するブレーンは円周。a に応じた付加的な構造が載っている。

おわりに

$$Fuk(X) \cong D^b coh Y$$

現在では、たくさんの例についてホモロジー的ミラー対称性が知られている。ホモロジー的ミラー対称性を利用して、それぞれの幾何学を調べるということも盛んに行われている。ただ、ホモロジー的ミラー対称性を一般に証明するというのはまだ遠い目標に見える。

まとめ：

1. シンプレクティック幾何と代数幾何という全く異なる幾何学がある
2. 物理学から来たミラー対称性という現象がそれらを不思議な方法で結びつける。

ご視聴いただきありがとうございました!